Tema 4: LÍMITE DE FUNCIONES. CONTINUIDAD.ASÍNTOTAS

1. Límites (Recordatorio cuando x tiende a infinito)
2. Límites de una función en un punto.
3. Límites de una función cuando tiende a infinito
4. Continuidad.
5. Asíntotas.

1. LÍMITES

Propiedades:

- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\pm\lim\limits_{x\to a}g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x))=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{n\to a}g(x)$
- $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$
- $\lim\limits_{x\to a}\left(f(x)^{g(x)}\right)=\lim\limits_{x\to a}f(x)^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}$

Para calcular un límite sólo hay que sustituir n por "∞"

TABLA DE OPERACIONES

+	a	+∞	-∞
B	a+b	+∞	-∞
+∞	+∞	+∞	Ind.
-∞	-∞	Ind.	-∞

·	0	a	± ∞
0	0	0	Ind.
b	0	a·b	± ∞
± ∞	Ind.	± ∞	± ∞

OJO: primero multiplicar los signos

:	0	a	± ∞
0	Ind	± ∞	± ∞
b	0	/b	± ∞
± ∞	0	0	Ind.

OJO: primero multiplicar los signos

$$p^{+\infty}=\begin{cases}+\infty & si\ \ p>1\\ Ind & si\ \ p=1\\ 0 & si\ \ 0<p<1\end{cases}$$

$$p^{-\infty}=\begin{cases}0 & si\ \ p>1\\ Ind & si\ \ p=1\\ +\infty & si\ \ 0<p<1\end{cases}$$

Al hacer los límites usamos las tablas anteriores

Pero el problema es cuando sale alguna INDETERMINACIÓN, que hay que resolverla de algún modo.

$$\boxed{\infty-\infty;\ 0\cdot\infty;\ \ \frac{\infty}{\infty};\ \frac{0}{0};\ \ 1^{\infty};\ \ 0^{0};\ \ \infty^{0}}$$

A) POLINOMIOS

Estrategia: Sacar factor común la "n" de mayor grado:

$$\lim_{n\to\infty}\left(n^3-8n^2-3n+2\right)=\infty-\infty-\infty+2=\infty-\infty \text{ INDETERMINACIÓN}$$

$$=\lim_{n\to\infty}n^3\left(1-\frac{8}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{2}{n^3}\right)=\infty\cdot(1-0-0+0)=\infty\cdot1=\infty$$

REGLA: $\lim\limits_{n\to\infty}P(n)=\pm\infty$ El signo es el del coeficiente principal del polinomio

Ejemplos:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(6n^3+8n\right)=\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\left(-3n^2+4n\right)=-\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to\infty}\left(-3n+2\right)=-\infty$

$\lim\limits_{n\to-\infty}\left(n^3-3n\right)=(-\infty)^3=-\infty$ $\quad\lim\limits_{n\to-\infty}\left(-8n^2+2\right)=-(-\infty)^2=-\infty$

B) FRACCIONES ALGEBRÁICAS

Estrategia: Dividir numerador y denominador por la "n" de mayor grado:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-4}{3n^2+5n+1}=\frac{\infty}{\infty}\text{ INDETERMINACIÓN}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{2n^2}{n^2}-\frac{4}{n^2}}{\frac{3n^2}{n^2}+\frac{5n}{n^2}+\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{4}{n^2}}{3+\frac{5}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{2-0}{3+0+0}=\frac{2}{3}$$

REGLA DE LOS GRADOS	• Grado numerador > Grado denominador → límite es $\pm\infty$ • Grado numerador < Grado denominador → límite es 0 • Grado numerador = Grado denominador → límite es cociente coeficientes principales

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^3-4}{-3n^2+5n+1}=-\infty \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-4}{3n^4+5n+1}=\infty \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n^5-4}{3n^2-5n^5+1}=-\frac{2}{5}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-4}{\sqrt{3n^2+5n+1}}=\infty \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{2n-4}{\sqrt{3n^2+5n+1}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

C) OTRAS INDETERMINACIONES

∞-∞

- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{3n+1}-n\right)=\infty-\infty$ INDETERMINACIÓN → Realizamos la operación

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2}{3n+1}-\frac{n\cdot(3n+1)}{3n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3n^2-n}{3n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-2n^2-n}{3n+1}\right)=-\infty$$

- $\lim_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+n}\right)=\infty-\infty$ INDETERMINACIÓN →Multiplicamos por el conjugado

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n-\sqrt{n^2+n}\right)\cdot\left(n+\sqrt{n^2+n}\right)}{\left(n+\sqrt{n^2+n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-(n^2+n)}{\left(n+\sqrt{n^2+n}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{-n}{\left(n+\sqrt{n^2+n}\right)}=\frac{-1}{1+1}=\frac{-1}{2}$$

0/0

- $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}:\frac{2n}{n^2-1}\right)=0:0$ INDETERMINACIÓN → Realizamos la operación

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}:\frac{2n}{n^2-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2-3}{2n^2}\right)=\frac{3}{2}$$

∞·0

- $\lim_{n\to\infty}\left(2n^2\cdot\frac{2n}{n^2-1}\right)=\infty\cdot 0$ INDETERMINACIÓN → Operación

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4n^3}{n^2-1}\right)=\infty$$

1^∞ → Estas son del tipo "e"

- $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} 3n} = 1^\infty$ INDETERMINACIÓN

Se resuelven haciendo $= e^{\lim\limits_{n\to\infty}(base-1)\cdot exponente}$

$$= e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}-1\right)\cdot 3n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2-n}{n}\right)\cdot 3n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}\cdot 3n} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n}{n}} = e^{6}$$

Importante: Comprobar que son del tipo 1^∞

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+2}{n^2+5n}\right)^{3n} = 2^\infty = \infty\ ;\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+2}{5n-3}\right)^{n^2+1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{\infty} = 0\ ;\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3+2}{2n^3+5n}\right)^{-3n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty} = 0$$

2. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

A. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Definición:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon\rangle 0\ \exists\delta_\varepsilon$ / (tal que) $\forall x, x\in E_{\delta_\varepsilon} a \Rightarrow$ $\mathrm{f(x)} \in \mathrm{E}_\varepsilon\, l$, es decir $\mathrm{f(x)} \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon)$

Caben distinguir cuando hablamos de límite de una función en un punto $(\lim\limits_{x\to a} f(x))$, podemos distinguir los límites laterales, por la izquierda $(\lim\limits_{x\to a^-} f(x))$ (toma valores menores que el punto), y por la derecha $(\lim\limits_{x\to a^+} f(x))$ (toma valores mayores que el punto).

Límite por la derecha.-

$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon\rangle 0\ \exists\delta_\varepsilon$ / (tal que) $\forall x, x\in E^{+}{}_{\delta_\varepsilon} a \Rightarrow$ $\mathrm{f(x)} \in \mathrm{E}_\varepsilon\, l$, es decir $\mathrm{f(x)} \in (l, l+\varepsilon)$

Límite por la izquierda.-

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon\rangle 0\ \exists\delta_\varepsilon$ / (tal que) $\forall x, x\in E^{+}{}_{\delta_\varepsilon} a \Rightarrow$ $\mathrm{f(x)} \in \mathrm{E}_\varepsilon\, l$, es decir $\mathrm{f(x)} \in (l-\varepsilon, l)$

Cuando los límites laterales coinciden existirá el límite en el punto.

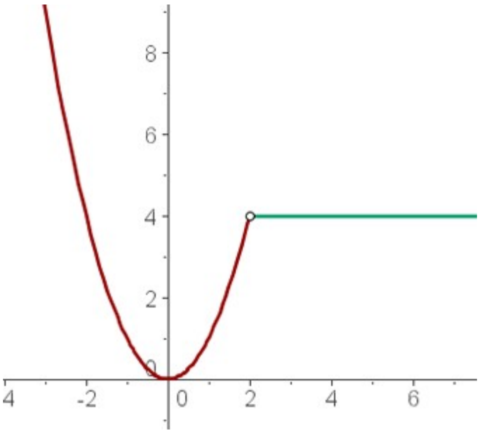
$$\exists \lim_{x\to a} f(x) = l \Leftrightarrow \exists \begin{pmatrix} \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = l \\ \hline \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = l \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 2 \\ 4 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 2^-} x^2 = 4$

$\lim\limits_{x\to 2^+} 4 = 4$



Definición de límite en punto cuando vale infinito:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall K\rangle 0\ \exists\delta_k$ / (tal que) $\forall x, x\in E_{\delta_k}\, a \Rightarrow$ f(x) ≥ K (Igual para -∞)

B. CÁLCULO DE LÍMITES EN UN PUNTO

Casos inmediatos

A.- Sustituir la x por el valor del punto. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 3}(2x^2-4x+1)=2\cdot 3^2-4\cdot 3+1=18-12+1=7$

$$\lim_{x\to -2}\left(\frac{1}{(x+2)^2}+3x\right)=\frac{1}{(-2+2)^2}+3\cdot(-2)=\frac{1}{0}-6=+\infty-6=+\infty$$

B.- Si el punto es dónde se juntan los trozos calculamos los límites laterales, y si son iguales, el límite de la función es ese, si no son iguales, no existe el límite. Si el punto no es de unión se calcula como antes.

Ejemplos: $f(x)=\begin{cases}3x-2 \text{ si } x<2\\ 6-x \text{ si } x\geq 2\end{cases}$ $\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(3x-2)=3\cdot 2-2=4\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(6-x)=6-2=4\end{matrix} \rightarrow \lim\limits_{x\to 2} f(x)=4$

$f(x)=\begin{cases}x^2 \text{ -1 si } x<2\\ 2x+1 \text{ si } x\geq 2\end{cases}$ $\begin{matrix}\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}(x^2-1)=2^2-1=3\\ \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}(2x+1)=2\cdot 2+1=5\end{matrix} \rightarrow \nexists \lim\limits_{x\to 2} f(x)$ No existe el límite

Indeterminación del tipo 0/0 con cociente de polinomios:

- Simplificamos la fracción algebraica y sustituimos.

 Ejemplo: $\left(\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x}=\frac{0}{0}\right.$ Indeterminación $\rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+1)\cdot(x-1)}{x\cdot(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x}=\frac{2}{1}=2\left.\right)$

- Sacando factor común la x elevada a menor potencia

 $\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^4-x^2}{x^2-x^3}=\frac{0}{0}\right.$ Indeterminación $\rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2(x^2-1)}{x^2(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x^2-1)}{(1-x)}=-1\left.\right)$

- Multiplicando por el conjugado

 $\left(\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{0}{0}\right.$ Indeterm., multiplicamos por el conjugado $\rightarrow \lim\limits_{x\to 1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1).\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=$

 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x+3-2^2)}{(x-1).\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1).\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}\left.\right)$

Indeterminación del tipo $\infty-\infty$**:** Realizamos la operación y simplificamos.

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{x^2-6}{x\cdot(x-3)}-\frac{1}{x-3}\right]=\frac{3}{0}-\frac{1}{0}=\infty-\infty;\text{ Indet. operamos}\rightarrow \lim_{x\to 3}\left[\frac{x^2-6}{x\cdot(x-3)}-\frac{x}{x\cdot(x-3)}\right]=\lim_{x\to 3}\left[\frac{x^2-x-6}{x(x-3)}\right]=$$

$$\lim_{x\to 3}\left[\frac{(x-3)\cdot(x+2)}{x(x-3)}\right]=\lim_{x\to 3}\left[\frac{x+2}{x}\right]=\frac{5}{3}$$

Indeterminación del tipo $0\cdot\infty$:

$$\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^2-4}{x}\cdot\frac{1}{x-2}\right]=\frac{0}{2}\cdot\frac{1}{0}=0\cdot\infty;\ \text{Indet. operamos}\to\lim_{x\to 2}\left[\frac{(x^2-4)\cdot 1}{x\cdot(x-2)}\right]=\frac{0}{0};\lim_{x\to 2}\left[\frac{(x\ \ -2)\cdot(x+2)}{x(x-2)}\right]=$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x}=\frac{4}{2}=2$$

Indeterminación del tipo $\infty\div\infty$:

$$\lim_{x\to 5}\left[\frac{x}{x^2-25}\div\frac{1}{x-5}\right]=\frac{5}{02}\div\cdot\frac{1}{0}=\infty\div\infty;\ \text{Indet. operamos}\to\lim_{x\to 5}\left[\frac{x(x\ \ -5)}{1\cdot(x^2-25)}\right]=\frac{0}{0};\lim_{x\to 5}\left[\frac{x\cdot(x\ \ -5)}{(x-5)\cdot(x+5)}\right]=$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{x}{x+5}=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$$

Indeterminación del tipo 1^{∞} **¿e?:**

Fórmula: $e^{\lim(base-1)\cdot\exp}$

$$\lim_{x\to 3}(x-2)^{\frac{1}{x^2-9}}=1^{\infty};\ \text{Indet. ¿e?}\to e^{\lim\limits_{x\to 3}(x-2-1)\cdot\frac{1}{x^{2-9}}}=e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\cdot(x+3)}}=$$

$$e^{\lim\limits_{x\to 3}\frac{1}{x+3}}=e^{\frac{1}{6}}$$

3. LÍMITE DE UNA FUNCIÓN CUANDO $x\to\infty$

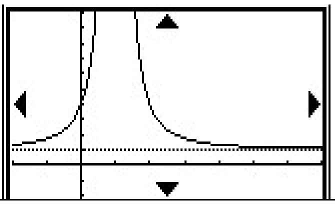
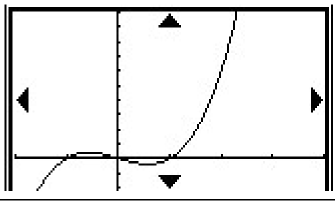
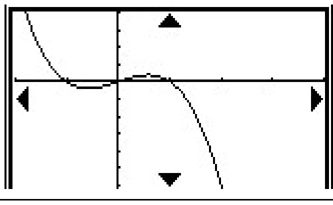
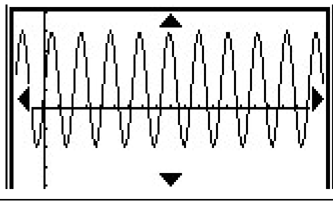
Definición de límite en el infinito:

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=l \Leftrightarrow \forall\varepsilon\rangle 0\ \ \exists K_\varepsilon$ / (tal que) $\forall x, x\geq K_\varepsilon \Rightarrow$ f(x) $\in E_\varepsilon l$ (Igual para -∞)

Definición de límite en infinito cuando vale infinito:

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty \Leftrightarrow \forall K\rangle 0\ \ \exists M_k$ / (tal que) $\forall x, x\geq M_k \Rightarrow$ f(x) ≥ K (Igual para -∞)

Cuando x→+∞ la función puede comportarse de varias formas:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=l$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$	$\nexists \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
			

Hay tres tipos de funciones conocidas que tienen límite infinito en el más infinito; son polinómicas (potencias), exponenciales con base mayor que 1 y logaritmos.

COMPARACIÓN DE INFINITOS

- **Definición de Infinito.**

  Diremos que f(x) es un infinito cuando $\lim\limits_{n\to\infty} f(x)=\pm\infty$

  Si f (x) y g(x) son dos infinitos se pueden comparar.

  - f(x) es un infinito de orden superior si $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$

- f(x) es un infinito del mismo orden si $\lim_{n\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l\neq 0$

Por orden de comparación es de orden superior:

- Las exponenciales (dentro de éstas según la base)
- Las polinómicas y irracionales (dentro de éstas según el grado)
- Las logarítmicas

Ejemplo: Ordenar de mayor a menor orden los siguientes infinitos: $3x^2;\ \ln x;\ 2^x;\ \sqrt{x};\ \log_2 x;\ 1'5^x;\ \sqrt[5]{x^4}$

Mayores Exponenciales $2^x > 1'5^x$, después Potencias $3x^2 > \sqrt[5]{x^4} > \sqrt{x}$ por último logaritmos $\log_2 x > \ln x$

Para el **cálculo de límites** debemos tener en cuenta el orden de los infinitos y los coeficientes de estos. Si tenemos los infinitos en una fracción, si el infinito más grande está en el numerador el límite será infinito (hay estudiar cociente de signos), si está en el denominador el límite es cero (0), y si son iguales el límite es el cociente de los coeficientes.

Ejemplos: $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x^3+2x-1}{10x^2-7x+3}=+\infty$ Infinito más grande en el numerador y cociente de signos +/+=+.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x^3-5x^2-1}{6x^3-7x^2}=\frac{-3}{6}=\frac{-1}{2}$ Mismo grado, dividimos coeficientes.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{-3x+5}{\sqrt{4x^2+5x}}=\frac{-3}{\sqrt{4}}=\frac{-3}{2}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-5}{2-2^x}=0$ Infinito más grande en el denominador.

$\lim_{x\to+\infty} 2^x-3^x=-\infty$ Infinito más grande 3x. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x}-\log x\right)=+\infty$

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^3+5}{x+2}-\frac{4x^3-x}{x-2}\right]=\infty-\infty$ (los dos son de grados 3-1=2) Realizamos la operación:

$=$

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(3x^3+5)\cdot(x-2)}{(x+2)\cdot(x-2)}-\frac{(4x^3-x)\cdot(x+2)}{(x+2)\cdot(x-2)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^4-6x^3+5x-10-4x^4-8x^3+x^2+2x}{x^2-4}\right]=$

$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{-x^4-14x^3+x^2+7x-10}{x^2-4}\right]=-\infty$

.

4. CONTINUIDAD

A. CONTINUIDAD EN UN PUNTO

Se dice que una función ***f*** es continua en un punto ***a*** cuando cumple las siguientes condiciones.

i) Existe la función en *a* $\exists\ f(a)$

ii) Existe el límite de la función cuando x tiende a *a* $\exists\ \lim_{x\to a} f(x)$

iii) Los dos valores anteriores coinciden. $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$

B. CLASIFICACIÓN DE DISCONTINUIDADES.

- **Si (existe)** $\exists \lim_{x\to a} f(x)$ diremos que es **discontinua evitable**, siempre intentaremos evitarla
- **Si no existe** $\lim_{x\to a} f(x)$ diremos que es **discontinua inevitable:**
  - **De salto finito**, cuando la diferencia de los límites laterales sea finita.
  - **De salto infinito,** cuando la diferencia de los límites laterales sea infinita
  - **De segunda especie,** cuando no exista uno de los límites laterales

C. CONTINUIDAD EN UN INTERVALO.

Una función es continua en un intervalo si es continua en cada punto del intervalo.
Generalmente todas las funciones son continuas en su dominio, el problema es estudiar estos puntos y en las funciones definidas a trozos hay que estudiar los puntos de unión.

Ejemplos:

- Estudia la continuidad de la función $f(x)=\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-x-2}$

Dominio es $\Re-\{-1,2\}$ (soluciones de la ecuación $x^2-x-2=0$)→ Es CONTINUA en $\Re-\{-1,2\}$

Vamos a clasificar las discontinuidades.

$\lim_{x\to -1}\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-x-2}=\dfrac{-3}{0}=\infty$ Discontinuidad **Inevitable de salto infinito** en x=-1 (ASÍNTOTA VERTICAL)

$\lim_{x\to 2}\dfrac{x^3-2x^2}{x^2-x-2}=\dfrac{0}{0}=Indt.\to \lim_{x\to 2}\dfrac{x^2(x-2)}{(x+1)\cdot(x-2)}=\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2}{\cdot(x+1)}=\dfrac{4}{3}$ (**Discontinua evitable** por falta de definición)

- Estudia la continuidad de la función $f(x)=\begin{cases} e^x & \text{si } x<0 \\ x+1 & \text{si } 0\le x\le 3 \\ x^2-2x & \text{si } x>3 \end{cases}$

Los tres trozos son continuos porque son: una función exponencial, una recta y una parábola.

Continuidad en x=0

$f(0)=1$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} e^x = e^0 = 1 \\ \lim_{x\to 0^+}(x+1)=1 \end{array}\right\}$ Son iguales→ Continua en x=0

Continuidad en x=3

$f(3)=4$

$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-}(x+1)=3+1=4 \\ \lim_{x\to 3^+}(x^2-2x)=9-6=3 \end{array}\right\}$ No son iguales→ No es continua en x=3 (**Discontinuidad Inevitable de Salto finito**)

La Función es continua en $\Re-\{3\}$

- Calcula el valor de los parámetros *a* y *b* para que sea continua: $y=\begin{cases} x-a & \text{si } x<-2 \\ ax^2+x+b & \text{si } -2\le x<1 \\ 2+x & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

Continua en cada trozo por ser rectas y parábola.

Continuidad en x=-2

$f(-2)=4a-2+b$

Continuidad en x=1

$f(1)=2+1=3$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to -2^-} x-a=-2-a \\ \lim\limits_{x\to 2^+}(ax^2+x+b)=4a-2+b\end{array}\right\}\text{Para ser continua}$$
debe cumplir $4a-2+b=-2-a \to 5a+b=0$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 3^-}(ax^2+x+b)=a+1+b \\ \lim\limits_{x\to 3^+}(2+x)=3\end{array}\right\}\text{Para ser continua}$$
debe cumplir $a+1+b=3 \to a+b=2$

Resolviendo el sistema de ecuaciones nos sale de solución $\boxed{a=\frac{-1}{2};\ \text{y}\ b=\frac{5}{3}}$

5. ASÍNTOTAS

A. ASÍNTOTAS VERTICALES

Una función $f(x)$ tiene una asíntota vertical en $x=a$ si: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\text{"}\infty\text{"}$.

Hay que calcular los límites en aquellos puntos que no están en el dominio.
Además para hacer un esbozo de la función hay que calcular la posición de la asíntota (signo de la función a la izquierda y la derecha de la asíntota)

B. ASÍNTOTAS HORIZONTALES

Una función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y=b$ si: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=b$.

Hay que calcular los límites en ± ∞. Normalmente calculamos el límite en ∞ (sin signo), pero cuando tengamos alguna función exponencial debemos calcularlo en + ∞ y - ∞ por separado.
Además para hacer un esbozo de la función hay que calcular la posición de la asíntota (valor de la función en un número grande (100) y en un número pequeño (-100))

C. ASÍNTOTAS OBLICUAS

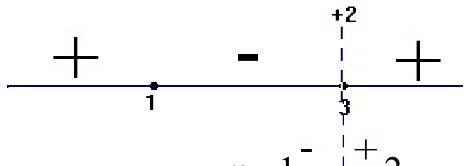
Una función $f(x)$ tiene una asíntota horizontal en $y=mx+n$ si: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} mx+n$.

Cálculo de asíntotas oblicuas: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ $\quad n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-mx\right)$

Si m=0 ó ∞ no hay asíntota oblicua, si n= ∞ tampoco hay.
Además para hacer un esbozo de la función hay que calcular la posición de la asíntota (valor de la función y de la asíntota oblicua en un número grande (100) y en un número pequeño (-100))

<u>Ejemplos:</u>

- $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-4x+3}$ $\quad Dom=\Re-\{1,3\}$

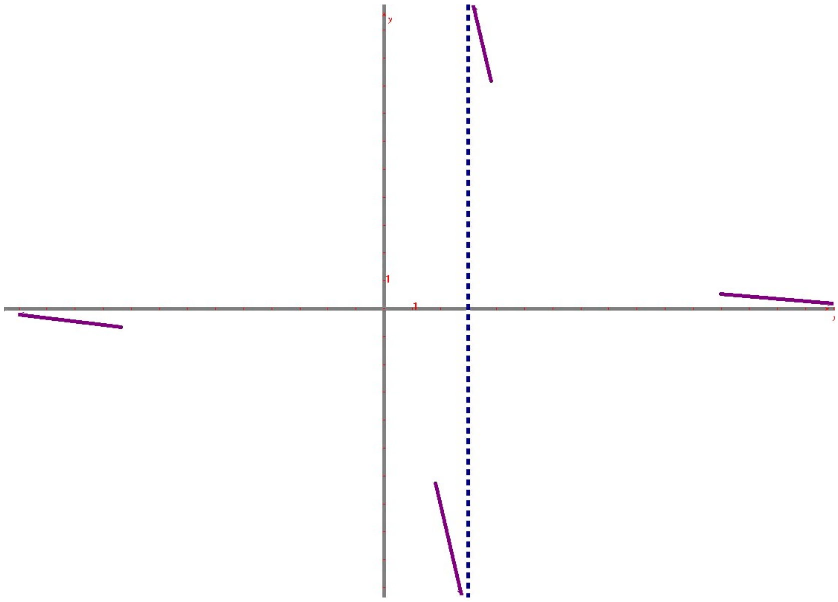


Asíntotas verticales: Hay A.V. en x=3

$$\lim_{x\to -1}\frac{x-1}{x^2-4x+3}=\frac{0}{0}=Ind.\to \lim_{x\to -1}\frac{x-1}{(x-1)(x-3)}=\frac{-1}{2}\ \text{(No hay)} \qquad \lim_{x\to -3}\frac{x-1}{x^2-4x+3}=\frac{2}{0}=\infty$$

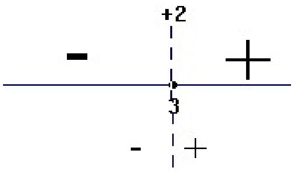
Asíntotas horizontales: Hay A.H. en y=0

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x-1}{x^2-4x+3}=0; \qquad f(100)=\frac{99}{9603}=0'01>0;\ f(-100)=\frac{-101}{10403}=-0'009<0$$



Ejemplos:

- $f(x)=\dfrac{x^2-2x-1}{x-3}$ $\quad Dom = \Re - \{13\}$



Asíntotas verticales: $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-2x-1}{x-3}=\dfrac{2}{0}=\infty$ Hay A.V. en $x=3$

Asíntotas horizontales: $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-2x-1}{x-3}=\infty$ No hay asíntota horizontal

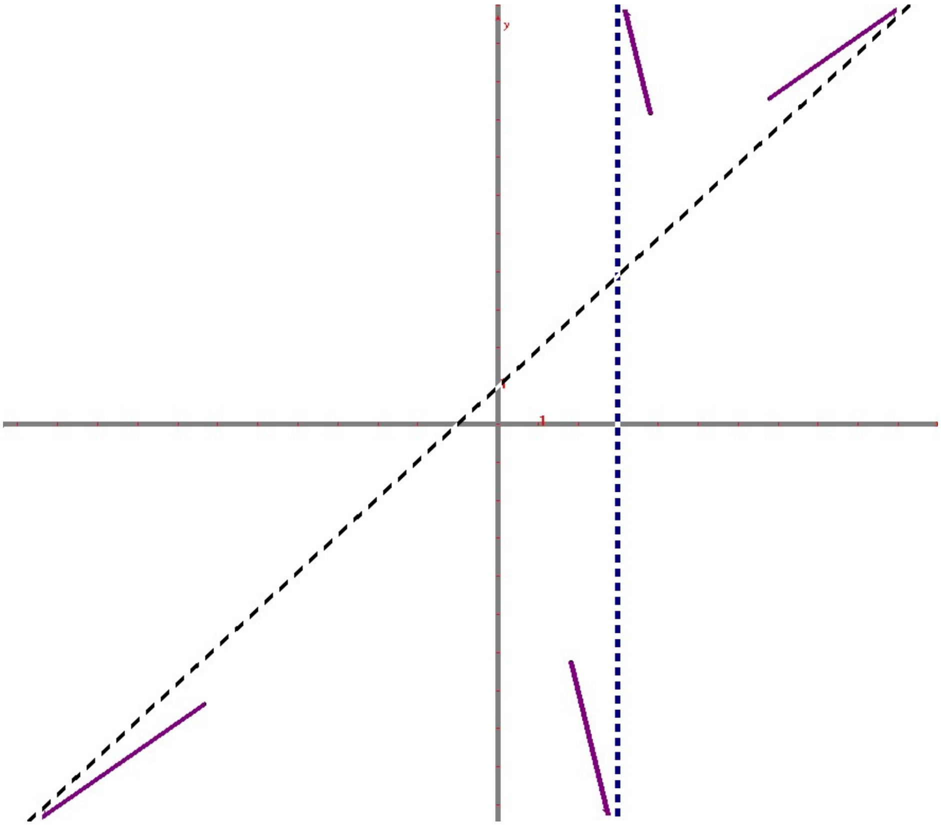
Asíntota oblicua: $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-2x-1}{x-3}:x=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-2x-1}{x^2-3x}=1$

$n=\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-2x-1}{x-3}-x=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x^2-2x-1}{x-3}-\dfrac{x^2-3x}{x-3}=\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{x-1}{x-3}=1$

Hay una asíntota oblicua en $y=x+1$

$f(100)=\dfrac{9799}{97}=101'02$ Asíntota $y(100)=101$ (función por encima de la asíntota)

$f(-100)=\dfrac{10199}{-103}=-99'02$ Asíntota $y(-100)=-99$ (función por debajo de la asíntota)


y
1