Proyecto MaTEX

Derivada-Aplicaciones

Fco Javier González Ortiz

Directorio

- Tabla de Contenido
- Inicio Artículo

2 de junio de 2004

Versin 1.00

MaTEX

DERIVADA APLICACIONES

Tabla de Contenido

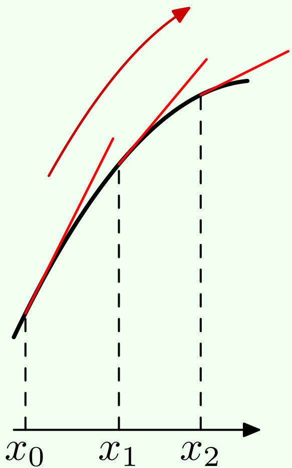
1. Función creciente

Definición 1.1 *Sea f una función definida en un intervalo I La función f es* ***estrictamente creciente****en el intervalo I si cumple*

$$x_0 < x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_0) < f(x_1) < f(x_2)$$

- Si la función es creciente, en los puntos x_0, x_1, x_2 las rectas tangentes tienen pendiente positiva.
- Recuerda que la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto x indica la pendiente de la recta tangente en ese punto.
- Si $f(x)$ es derivable se tiene que

$$f'(x) > 0 \Longrightarrow f(x) \text{ Creciente}$$



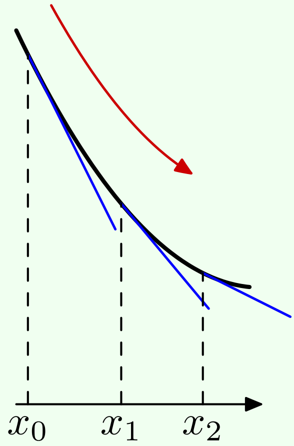
2. Función decreciente

Definición 2.1 *Sea f una función definida en un intervalo I La función f es* ***estrictamente decreciente*** *en el intervalo I si cumple*

$$x_0 < x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_0) > f(x_1) > f(x_2)$$

- Si la función es decreciente, en los puntos x_0, x_1, x_2 las rectas tangentes tienen pendiente negativa.
- Recuerda que la derivada de una función $y = f(x)$ en un punto x indica la pendiente de la recta tangente en ese punto.
- Si $f(x)$ es derivable se tiene que

$$f'(x) < 0 \Longrightarrow f(x) \text{ Decreciente}$$



3. Puntos singulares

Definición 3.1 *Sea f una función definida en un intervalo I. Los puntos de la función que tienen tangente horizontal se llaman* ***puntos singulares****.*

Como la tangente es horizontal su pendiente vale 0. En los puntos singulares se tiene que la derivada vale 0. $f'(x) = 0$.

Hay tres casos:

- El punto c_1 se llama punto de mínimo relativo.

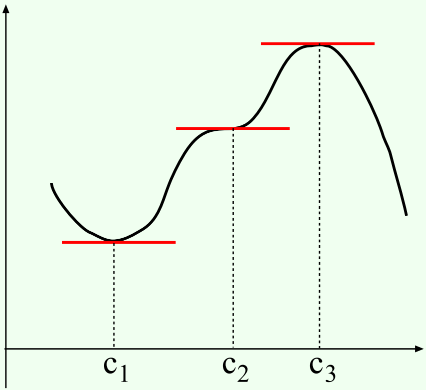
$$f'(c_1) = 0$$

- El punto c_2 se llama punto de inflexión.

$$f'(c_2) = 0$$

- El punto c_3 se llama punto de máximo relativo.

$$f'(c_3) = 0$$

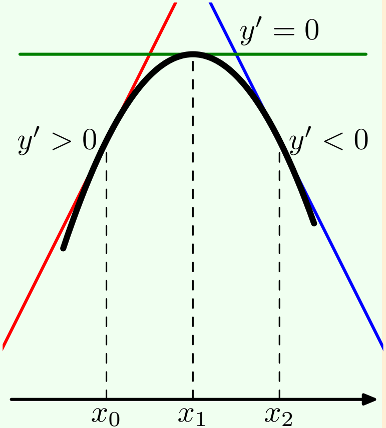


A continuación estudiamos en detalle cada uno de ellos.

- **Máximo**

  Observa el gráfico.

  - A la izquierda de x_1 las tangentes tienen pendiente positiva, la función es creciente y la derivada
  $$y' > 0$$
  - A la derecha de x_1 las tangentes tienen pendiente negativa, la función es decreciente y la derivada
  $$y' < 0$$
  - En el punto x_1 la tangente es horizontal y hay un máximo
  $$y'(x_1) = 0$$



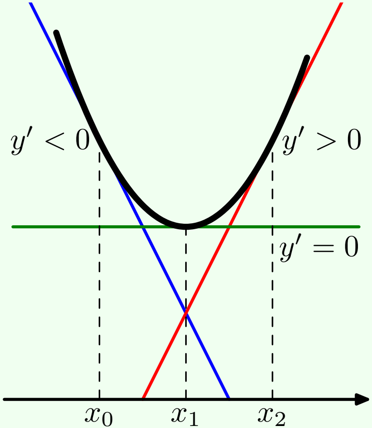
	Máximo relativo		
		x_1	
y'	$+$	0	$-$
$y = f(x)$	$\nearrow$ creciente	$f(x_1)$	$\searrow$ decreciente

MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
Derivada Aplicaciones
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

- **Mínimo**

  Observa el gráfico.

  - A la izquierda de x_1 las tangentes tienen pendiente negativa, la función es decreciente y la derivada
  $$y' < 0$$
  - A la derecha de x_1 las tangentes tienen pendiente positiva, la función es creciente y la derivada
  $$y' > 0$$
  - En el punto x_1 la tangente es horizontal y hay un mínimo
  $$y'(x_1) = 0$$

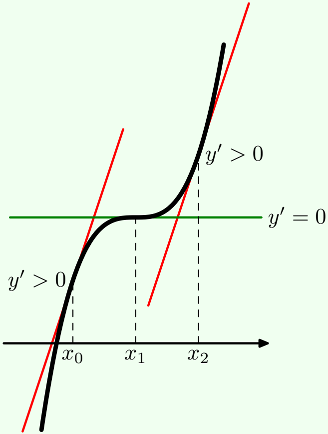


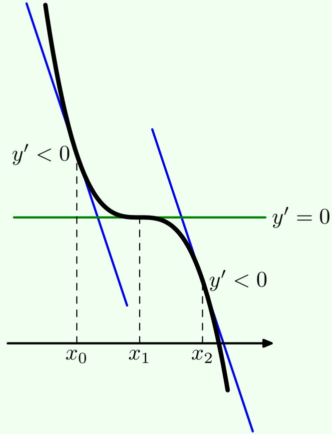
	Mínimo relativo		
		x_1	
y'	$-$	0	$+$
$y = f(x)$	$\searrow$ decreciente	$f(x_1)$	$\nearrow$ creciente

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

- **Punto de inflexión**

Cuando la derivada es cero $y' = 0$, no siempre hay máximo o mínimo, pues depende como crezca o decrezca a la izquierda y derecha del punto.





	Punto inflexión		
		x_1	
y'	$+$	0	$+$
$y = f(x)$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\nearrow$

	Punto inflexión		
		x_1	
y'	$-$	0	$-$
$y = f(x)$	$\searrow$	$f(x_1)$	$\searrow$

Así pues para estudiar si una función tiene o no, máximos o mínimos calculamos los puntos que anulan la derivada y', estudiando a continuación el signo de la misma.

3.1. Clasificación Máximos y mínimos

Teorema 3.1. (Test de Clasificación) Sea $f(x)$ una función y c un punto donde $f'(c) = 0$

a) Test de Máximo Si f' es positiva a la izquierda de c y f' es negativa a la derecha de c, entonces c es un máximo local.

b) Test de Mínimo Si f' es negativa a la izquierda de c y f' es positiva a la derecha de c, entonces c es un mínimo local.

c) Test de Inflexión Si $f'(c) = 0$ no cambia de signo a la izquierda y a la derecha de c, entonces c es un punto de inflexión.

Ejemplo 3.1. Estudiar el crecimiento de $f(x) = x^2 - 1$.

Solución:

- Hallamos f' e igualamos a cero. $f'(x) = 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$
- Estudiamos el signo de la derivada dando valores a la izquierda y a la derecha de 0

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y’		$-$	0	$+$	
y		$\searrow$	0	$\nearrow$	

- Decrece en $(-\infty, 0)$ y crece en $(0, +\infty)$.$x = 0$ es un mínimo.

$\square$

Ejemplo 3.2. Estudiar el crecimiento de $f(x) = x^3$.

Solución: Hallamos f' e igualamos a cero.

$$f'(x) = 3x^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$$

Estudiamos el signo de la derivada

x	$-\infty$		0		$+\infty$
y’		$+$	0	$+$	
y		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

La función es siempre creciente El punto $x = 0$ es un punto de inflexión.

$\square$

Ejemplo 3.3. Estudiar el crecimiento de $f(x) = x^4 - 2x^2$.

Solución:

- Hallamos f' e igualamos a cero.

$$f'(x) = 4x^3 - 4x$$

$$4x(x-1)(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 0, \pm 1$$

- Estudiamos el signo de la derivada dando valores

$$f'(-2) = -24 < 0 \qquad f'(-\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} > 0$$

$$f'(\frac{1}{2}) = -\frac{3}{2} < 0 \qquad f'(2) = 24 > 0$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

- La función es decreciente en $(-\infty, -1)$ y $(0, 1)$
- La función es creciente en $(-1, 0)$ y $(1, \infty)$.
- Hay dos mínimos en $m(-1, -1)$ y $m(1, -1)$.
- Hay un máximo en $M(0, 0)$.

$\square$

Ejemplo 3.4. Estudiar el crecimiento de $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$.

Solución:

- Hallamos f' e igualamos a cero.

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$x(3\,x - 4) = 0 \Longrightarrow x = 0,\ x = \frac{4}{3}$$

- Estudiamos el signo de la derivada dando valores

$$f'(-1) = 7 > 0 \qquad f'(1) = -1 < 0 \qquad f'(2) = 4 > 0$$

x	$-\infty$		0		$4/3$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	0	$+$	
g		$\nearrow$	0	$\searrow$	$f(4/3)$	$\nearrow$	

- La función es decreciente en $(0, \frac{4}{3})$.
- La función es creciente en $(-\infty, 0)$ y $(\frac{4}{3}, \infty)$.
- Hay un mínimo en $x = \frac{4}{3}$.
- Hay un máximo en $x = 0$.

$\square$

Ejercicio 1. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de:

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$

b) $g(x) = 4x^3 - x^4$

Ejercicio 2. Hallar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de:

a) $f(x) = x^2 - \ln x^2$

b) $g(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-4)}$

Ejercicio 3. Sea la función $f(x) = a\,x + \dfrac{1}{x}$. Hallar valores de a para que $f(x)$ sea decreciente en $x = 2$

Ejercicio 4. La función $f(x) = 3\,x^2 + m\,x + 8$, tiene un mínimo en $x = 1$. Calcular m y el valor del mínimo.

Ejercicio 5. Hallar a y b para que la función $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b$, tenga un mínimo igual a 3 en $x = 2$.

Ejercicio 6. En un día desapacible, la temperatura T en grados centígrados varió con el tiempo t en horas según la función

$$T(t) = t^2 - 9\,t + 8$$

para $0 \leq t \leq 12$.

a) La temperatura a las dos de la mañana

b) ¿Cuál fue la temperatura mínima? ¿A que hora?

c) ¿A que hora hubo 0 grados?

d) Halla $T'(2)$ y explica su significado

Ejercicio 7. El consumo de gasolina de cierto coche viene dado por la función

$$C(x) = \frac{x^2}{400} - \frac{9x}{20} + \frac{113}{4}$$

donde x es la velocidad en km/h y $C(x)$ es el consumo en litros cada 100 km.

a) Calcula cuál es el consumo mínimo y a qué velocidad se obtiene.

b) Estudia (representando la función) el consumo de gasolina en función de la velocidad.

Ejercicio 8. Clasifica los máximos y mínimos de las funciones:

(a) $f(x) = 2x^2 - x + 3$.

(b) $f(x) = (x-1)e^x$.

(c) $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$.

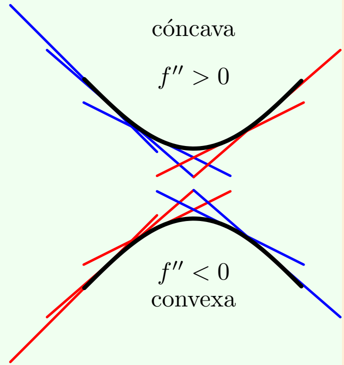
(d) $f(x) = x\,\ln x$.

(e) $f(x) = x\,\ln^2 x$.

(f) $f(x) = x^2\,\ln x$.

4. Curvatura

A partir del gráfico se observa que donde la curva es **cóncava** $\cup$, las tangentes están por debajo de la función, y, donde la curva es **convexa** $\cap$, las tangentes están por encima de la función.
Por otra parte en la gráfica superior las pendientes van aumentando, es decir $f'(x)$ es creciente y por tanto su derivada es positiva $f''(x) > 0$

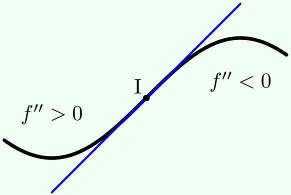


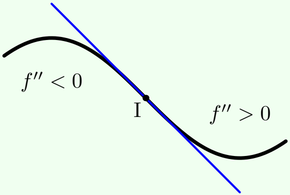
	Mínimo relativo			Máximo relativo		
		$x = a$			$x = a$	
f'	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	$\exists f(a)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\exists f(a)$	$\searrow$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

4.1. Punto de Inflexión

Cuando en un punto $(a, f(a))$ la función cambia de curvatura se tiene un punto de inflexión, y la tangente en el punto, si existe, atraviesa la función.





	Punto Inflexión		
		$x = a$	
f''	$+$	0	$-$
f	$\cup$	$\exists f(a)$	$\cap$

	Punto Inflexión		
		$x = a$	
f''	$-$	0	$+$
f	$\cap$	$\exists f(a)$	$\cup$

Ejercicio 9. Hallar los máximos, mínimos y puntos de inflexión de las funciones:

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$.
(b) $f(x) = x^4 - 2x^3$.
(c) $f(x) = x^4 + 2x^2$.
(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1}$.
(e) $f(x) = e^x (x - 1)$.
(f) $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$.

Ejercicio 10. Dada la función

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & x \leq -1 \\ -x^2 + 2 & -1 < x \leq 1 \\ \ln x & 1 < x \end{cases}$$

a) Hallar a para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$

b) Representar $f(x)$ cuando $a = 3$

c) Hallar la derivada de $f(x)$ en $x = -1$ y $x = 1$

Ejercicio 11. Sea la función $f(x) = x \ln \dfrac{x}{a}, a > 0$. Hallar el valor de a para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = 1$

Ejercicio 12. La función $f(x) = 90\,x^2 - 0{,}2x^4$ el beneficio en miles de euros que se obtiene por la fabricación de x unidades de cierto producto

a) ¿Cuántas unidades de este producto se han de fabricar para obtener un beneficio máximo?

b) ¿Cuál es este beneficio máximo?

Ejercicio 13. En una empresa el coste $C(x)$ de un artículo se calcula a partir de la cantidad x de un producto que se pide cada vez que la empresa se queda sin él. Dicho coste viene expresado por la función

$$C(x) = \frac{200}{x} + \frac{x}{2} + 400$$

¿Cuál es la cantidad del producto x que minimiza el coste para la empresa?

Ejercicio 14. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, tiene un punto de derivada nula en $(1, 1)$, que no es un extremo relativo. Razonar el valor de a, b y c.

Ejercicio 15. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, tiene un punto de derivada nula en $(1, 1)$, que no es un extremo relativo. Razonar el valor de a, b y c.

Ejercicio 16. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tiene como tangente en el punto de inflexión $(1, 0)$,la recta $y = -3x + 3$, y presenta un extremo en el punto de abcisa $x = 0$

Ejercicio 17. Hallar el valor de b y m para que la curva $y = x^3 + bx^2 + mx + 1$ tenga un punto de inflexión en el punto $(0, 1)$, y la pendiente de la recta tangente en ese punto valga 1.

Ejercicio 18. La función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, tiene como tangente en el punto $(1, 1)$,la recta $y = -x + 2$, y presenta un extremo en el punto $(0, 2)$.

Ejercicio 19. Determinar el polinomio $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, que tiene 1 y 2 como raíces, pasa por $(-1, 24)$ y tiene un mínimo relativo en $x = 1$.

Test. Si una función $f(x)$ tiene recta tangente en el punto $(a, f(a))$ entonces existe $f'(a)$

(a) Verdadero (b) Falso

MATEMATICAS 2º Bachillerato
SOCIALES
MaTEX
DERIVADA APLICACIONES
◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Test. Si $f'(c)$ no existe entonces existe $x = c$ es un punto crítico.

(a) Verdadero (b) Falso

Ejercicio 20. Estudiar la concavidad, convexidad y puntos de inflexión de las funciones:

(a) $f(x) = x^3 - 3x + 4$.
(b) $f(x) = x^4 - 6x^2$.
(c) $f(x) = (x-2)^4$.
(d) $f(x) = xe^x$.
(e) $f(x) = \ln(x+1)$.
(f) $f(x) = \dfrac{2-x}{x+1}$.

Ejercicio 21. Halla los intervalos de concavidad y convexidad de

$$f(x) = x|x|$$

y comprueba que existe un punto de inflexión en $x = 0$ a pesar de que no existe $f''(0)$.

Soluciones a los Ejercicios

Ejercicio 1.

a) Sea $f(x) = \dfrac{1}{x-2}$. Con $Dom(f) = R - \{2\}$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} < 0 \qquad \forall x \in R - \{2\}$$

Luego f es estrictamente decreciente.

b) Sea $g(x) = 4x^3 - x^4$. Resolvemos $g' = 0$

$$g'(x) = 12x^2 - 4x^3 = 0 \Longrightarrow 4x^2(3-x) = 0 \Longrightarrow x = 0, 3$$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
g'		$+$	0	$+$	0	$-$	
g		$\nearrow$	0	$\nearrow$	27	$\searrow$	

Ejercicio 1

Ejercicio 2.

a) Sea $f(x) = x^2 - \ln x^2$. Con $Dom(f) = R - \{0\}$ Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = 0 \Longrightarrow 2x^2 - 2 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$$

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$	1	$\nearrow$	

b) Sea $g(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-4)}$. Con $Dom(g) = R - \{-1, 4\}$. Resolvemos $g' = 0$

$$g'(x) = -\frac{2x-3}{(x+1)^2(x-4)^2} = 0 \Longrightarrow x = 3/2$$

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
g'		$+$	0	$-$	
g		$\searrow$	$f(\frac{3}{2})$	$\nearrow$	

Ejercicio 2

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

Ejercicio 3. Siendo

$$f(x) = a\,x + \frac{1}{x}$$

para que $f(x)$ sea decreciente en $x = 2$, (siendo $f(x)$ derivable en) es necesario que $f'(2) \leq 0$

$$f'(x) = a - \frac{1}{x^2}$$

luego

$$f'(2) \leq 0 \Longrightarrow a - \frac{1}{4} \leq 0 \Longrightarrow \boxed{a \leq \frac{1}{4}}$$

Ejercicio 3

Ejercicio 4. Como $f(x) = 3\,x^2 + m\,x + 8$,

$$f'(x) = 6\,x + m$$

- tiene un mínimo en $x = 1$, luego

$$f'(1) = 0 \Longrightarrow f'(1) = 6\,(1) + m = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{m=-6}}$$

- el valor del mínimo es

$$f(1) = 3\,(1)^2 + 6\,(1) + 8 = 17$$

Ejercicio 4

Ejercicio 5. Como $f(x) = x^3 + a\,x^2 + b$,

$$f'(x) = 3\,x^2 + 2\,a\,x$$

- tiene un mínimo en $x = 2$, luego

$$f'(2) = 0 \Longrightarrow f'(2) = 3\,(2)^2 + 2\,a\,(2) = 0 \Longrightarrow \boxed{a = -3}$$

- el valor del mínimo es 3, luego

$$f(2) = 3 \Longrightarrow (2)^3 - 3\,(2)^2 + b = 3 \Longrightarrow \boxed{b = 7}$$

Ejercicio 5

MATEMATICAS 2º Bachillerato SOCIALES
MaTEX
DERIVADA APLICACIONES
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 6. Como

$$T(t) = t^2 - 9\,t + 8 \qquad 0 \leq t \leq 12$$

a) La temperatura a las dos de la mañana será

$$T(2) = (2)^2 - 9\,(2) + 8 = -6$$

b) Hallamos $T'(t)$

$$T'(t) = 2\,t - 9 = 0 \Longrightarrow \boxed{t = 4{,}5}$$

a las 4,5 horas se alcanzó la temperatura mínima de $T(4{,}5) = -12{,}25$

c) ¿A que hora hubo 0 grados? resolvemos $T(t) = 0$

$$T(t) = t^2 - 9\,t + 8 = 0 \Longrightarrow \boxed{t = 1} \quad \boxed{t = 8}$$

d) Halla $T'(2)$ y explica su significado

$$T'(2) = 2\,(2) - 9 = -5$$

significa que a esa hora la temperatura está bajando a razón de 5 grados centígrados por hora.

Ejercicio 6

◀◀ ▶▶ ◀ ▶ ◀ Doc Doc ▶ Volver Cerrar

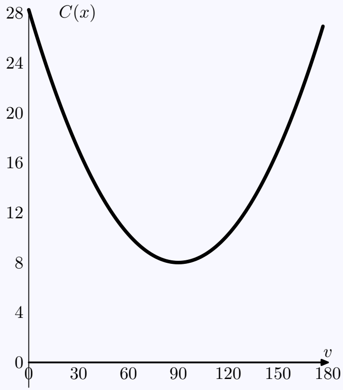
Ejercicio 7. Siendo el consumo $C(x) = \dfrac{x^2}{400} - \dfrac{9x}{20} + \dfrac{113}{4}$

a) $C'(x) = \dfrac{x}{200} - \dfrac{9}{20}$

$$C'(x) = \frac{x}{200} - \frac{9}{20} = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 90}$$

a 90 km/h se alcanza el consumo mínimo que vale $C(90) = 8$ litros.

b) La gráfica de $C(x)$ es una parábola de mínimo $(90; 8)$.



Ejercicio 7

MATEMATICAS 2º Bachillerato
r=A+λu
A
δ
B
s=B+μv
SOCIALES
MaTEX
DERIVADA
APLICACIONES
◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 8(a) Sea $f(x) = 2x^2 - x + 3$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 4x - 1 = 0 \Longrightarrow x = 1/4$$

x	$-\infty$		$1/4$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(1/4)$	$\nearrow$	

$$\text{Mínimo } m\left(\frac{1}{4}, f(\frac{1}{4})\right)$$

$\square$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 8(b) Sea $f(x) = (x-1)e^x$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = x\,e^x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(0) = -1$	$\nearrow$	

Mínimo $m\,(0, -1)$

$\square$

Ejercicio 8(c) Sea $f(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$. $Dom(f) = R - \{0\}$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^3} = 0 \Longrightarrow x^3 - 2 = 0 \Longrightarrow x = \sqrt[3]{2}$$

Punto crítico $x = \sqrt[3]{2}$, pues $x = 0 \notin Dom(f)$

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{2}$		$+\infty$
f'		$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$\nexists$	$\searrow$	$f(\sqrt[3]{2})$	$\nearrow$	

$$\text{Mínimo } m\left(\sqrt[3]{2}, f(\sqrt[3]{2})\right)$$

$\square$

Ejercicio 8(d) Sea $f(x) = x \ln x$.

$$Dom(f) = (0, \infty)$$

Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = \ln x + 1 = 0 \Longrightarrow x = e^{-1}$$

x	0	e^{-1}	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(e^{-1})$	$\nearrow$

Mínimo $m(e^{-1}, -e^{-1})$

□

Ejercicio 8(e) Sea $f(x) = x \ln^2 x$.

$$Dom(f) = (0, \infty)$$

Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = \ln x(\ln x + 2) = 0 \Longrightarrow x = 1, e^{-2}$$

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Máximo $M(e^{-2}, 4e^{-2})$ Mínimo $m(1, 0)$

□

Ejercicio 8(f) Sea $f(x) = x^2 \ln x$.

$$Dom(f) = (0, \infty)$$

Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = x(2\ln x + 1) = 0 \Longrightarrow x = e^{-1/2}$$

x	0	$e^{-1/2}$	$+\infty$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	$f(e^{-1/2})$	$\nearrow$

$$\text{Mínimo } m(e^{-1/2}, -\frac{1}{2e})$$

$\square$

Ejercicio 9(a) Sea $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 0 \Longrightarrow 3(x^2 - 4x + 3) = 0 \Longrightarrow x = 1, 3$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	

Máximo $M(1, 4)$ Mínimo $m(3, 0)$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 6x - 12 = 0 \Longrightarrow 6(x - 2) = 0 \Longrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\cap$	$f(2) = 2$	$\cup$	

Punto de inflexión $I(2, 2)$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 9(b) Sea $f(x) = x^4 - 2x^3$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 0 \Longrightarrow 2x^2(2x-3) = 0 \Longrightarrow x = 0, 3/2$$

x	$-\infty$		0		$3/2$		$+\infty$
f'		$-$	0	$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(0)$	$\searrow$	$f(3/2)$	$\nearrow$	

$$\text{Mínimo } m(\frac{3}{2}, f(\frac{3}{2})) = (\frac{3}{2}, -\frac{27}{16})$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 12x^2 - 12x = 0 \Longrightarrow 12x(x-1) = 0 \Longrightarrow x = 0, 1$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cup$	$f(0)$	$\cap$	$f(1)$	$\cup$	

$$\text{Puntos de inflexión } I_1(0,0) \quad I_2(1,-1)$$

$\square$

◄◄ ►►
◄ ►
◄ Doc Doc ►
Volver Cerrar

Ejercicio 9(c) Sea $f(x) = x^4 + 2x^2$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = 4x^3 + 4x = 0 \Longrightarrow 4x(x^2 + 1) = 0 \Longrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	

Mínimo $m(0, 0)$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 12x^2 + 2 \neq 0 \quad \forall x \Longrightarrow \text{ no se anula}$$

no tiene puntos de inflexión. Como

$$f''(x) > 0 \forall x$$

la función es cóncava.

$\square$

Ejercicio 9(d) Sea $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = -\frac{2x}{(x^2+1)^2} = 0 \Longrightarrow 2x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	
f		$\nearrow$	$f(0)$	$\searrow$	

Máximo $M(0,1)$

$$f'' = 0 \Longrightarrow f''(x) = \frac{6x^2-2}{(x^2+1)^3} = 0 \Longrightarrow 6x^2-2 = 0 \Longrightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cup$	$f(\frac{1}{\sqrt{3}})$	$\cap$	$f(\frac{1}{\sqrt{3}})$	$\cup$	

Puntos de inflexión $I_1(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4})$ $\quad I_2(\dfrac{1}{\sqrt{3}}, \dfrac{3}{4})$

$\square$

Ejercicio 9(e) Sea $f(x) = e^x(x-1)$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = xe^x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(0)$	$\nearrow$	

Mínimo $m(0,-1)$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f'(x) = (x+1)e^x = 0 \Longrightarrow (x+1) = 0 \Longrightarrow x = -1$$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\cap$	$f(-1)$	$\cup$	

Punto de inflexión $I(-1,-2e^{-1})$

$\square$

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 9(f) Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x}$. Con $Dom(f) = R - \{0\}$. Resolvemos $f' = 0$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2} \neq 0$$

Como $f'(x) > 0 \qquad \forall x \in Dom(f)$ es siempre creciente.
Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = -\frac{2}{x^3} \neq 0$$

Como $f'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in Dom(f)$ no tiene puntos de inflexión. $\square$

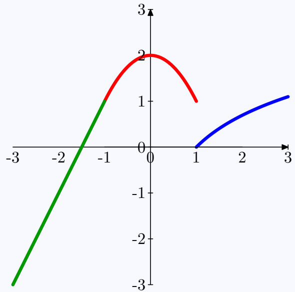
Ejercicio 10. Siendo

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a & x \leq -1 \\ -x^2 + 2 & -1 < x \leq 1 \\ \ln x & 1 < x \end{cases}$$

a) Para que $f(x)$ sea continua en $x = -1$

$$f(-1^-) = -2 + a = f(-1^+) = 1 \Longrightarrow a = 3$$

b) Representar cuando $a = 3$



c) Es derivable en $x = -1$, pues:

$$f'(-1^-) = 2 \qquad f'(-1^+) = (-2x) = 2$$

y no es derivable en $x = 1$, ya que no es continua.

Ejercicio 10

Doc Doc
Volver Cerrar

Ejercicio 11. Siendo

$$f(x) = x \ln \frac{x}{a}, a > 0$$

para que $f(x)$ tenga un mínimo relativo en $x = 1$, (siendo $f(x)$ derivable en) es necesario que $f'(1) = 0$

$$f'(x) = \ln \frac{x}{a} + x \cdot \frac{a}{x} \cdot \frac{1}{a} = \ln \frac{x}{a} + 1$$

luego

$$f'(1) = 0 \Longrightarrow \ln \frac{1}{a} + 1 = 0 \Longrightarrow \ln a = 1 \Longrightarrow \boxed{a = e}$$

Para comprobar que es mínimo se calcula

$$f''(x) = \frac{1}{x} \qquad f''(e) > 0 \Longrightarrow \text{ es un mínimo}$$

Ejercicio 11

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 12. Sea $f(x) = 90\,x^2 - 0{,}2x^4$ da el beneficio en miles de euros que se obtiene por la fabricación de x unidades

a) Buscamos el máximo

$$f'(x) = 180\,x - 0{,}8\,x^3 = 0 \Longrightarrow= x(180 - 0{,}8\,x^2) = 0 \Longrightarrow$$

$$x = 0 \quad x = \pm 15$$

b) El beneficio máximo es $f(15) =$

Ejercicio 12

Ejercicio 13. Siendo

$$C(x) = \frac{200}{x} + \frac{x}{2} + 400$$

buscamos el mínimo con la condición $f'(x) = 0$

$$f'(x) = -\frac{200}{x^2} + \frac{1}{2}$$

luego

$$f'(x) = 0 \Longrightarrow -\frac{200}{x^2} + \frac{1}{2} = 0 \Longrightarrow x = \pm 20$$

Para comprobar si $x = 20$ es máximo, hallamos $f''(29)$

$$f''(x) = +\frac{400}{x^3} \qquad f''(20) > 0 \Longrightarrow \text{ es un mínimo}$$

Ejercicio 13

Ejercicio 14. Como $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$,

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \qquad f''(x) = 6x + 2a$$

- f pasa por $(1,1)$, luego $f(1) = 1 \Longrightarrow \boxed{1+a+b+c=1}$
- Derivada nula en $(1,1)$ luego $\Longrightarrow f'(1) = 0 \Longrightarrow \boxed{3+2a+b=0}$
- $(1,1)$ es punto de inflexión, luego $f''(1) = 0 \Longrightarrow \boxed{6+2a=0}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = -3 \quad b = 3 \quad c = -1$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ Ejercicio 14

Ejercicio 15. Como $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$,

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \qquad f''(x) = 6x + 2a$$

- f pasa por $(1,1)$, luego $f(1) = 1 \Longrightarrow \boxed{1+a+b+c=1}$
- Derivada nula en $(1,1)$ luego $\Longrightarrow f'(1) = 0 \Longrightarrow \boxed{3+2a+b=0}$
- $(1,1)$ es punto de inflexión, luego $f''(1) = 0 \Longrightarrow \boxed{6+2a=0}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = -3 \quad b = 3 \quad c = -1$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ Ejercicio 15

Ejercicio 16. Como $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b$$

- $(1, 0)$ es punto de inflexión $\Longrightarrow f''(1) = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{6a+2b=0}}$
- $y = -3x + 3$ es tangente en $(1, 0)$, luego $f'(1) = -3$

$$\boxed{\text{3a+2b+c=-3}}$$

- f pasa por $(1, 0)$, luego $f(1) = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{a+b+c+d=0}}$
- En $x = 0$, hay un extremo, luego $f'(0) = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{c=0}}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = 1 \quad b = -3 \quad c = 0 \quad d = 2$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ Ejercicio 16

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 17. Como $f(x) = x^3 + bx^2 + mx + 1$,

$$f'(x) = 3x^2 + 2bx + m \qquad f''(x) = 6x + 2b$$

- $(0,1)$ es punto de inflexión, luego $f''(0) = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{2b=0}}$
- Derivada en $x = 0$ vale 1, luego $\Longrightarrow f'(0) = 1 \Longrightarrow \boxed{\text{m=1}}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$b = 0 \quad m = 1$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 + x + 1$ Ejercicio 17

Ejercicio 18. Como $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad f''(x) = 6ax + 2b$$

- f pasa por $(1,1)$, luego $f(1) = 1 \Longrightarrow \boxed{\text{a+b+c+d=1}}$
- f pasa por $(0,2)$, luego $f(0) = 2 \Longrightarrow \boxed{\text{d=2}}$
- La pendiente en $x = 1$ es $-1 \Longrightarrow f'(1) = -1 \Longrightarrow \boxed{\text{3a+2b+c=-1}}$
- Un extremo en $x = 0$, luego $\Longrightarrow f'(0) = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{c=0}}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = 1 \quad b = -2 \quad c = 0 \quad d = 2$$

y la función pedida es $f(x) = x^3 - 2x^2 + 2$ Ejercicio 18

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 19. Como $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$,

$$p'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad p''(x) = 6ax + 2b$$

- f pasa por $(-1, 24)$, luego $p(-1) = 24 \Longrightarrow \boxed{\text{-a+b-c+d=24}}$
- $x = 1$ es una raíz , luego $p(1) = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{a+b+c+d=0}}$
- $x = 2$ es una raíz , luego $p(2) = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{8a+4b+2c+d=0}}$
- Un mínimo en $x = 1$, luego $\Longrightarrow p'(1) = 0 \Longrightarrow \boxed{\text{3a+2b+c=0}}$

Resolviendo el sistema se obtiene

$$a = -2 \quad b = 8 \quad c = -10 \quad d = 4$$

y el polinomio pedido es $p(x) = -2x^3 + 8x^2 - 10x + 4$ Ejercicio 19

Ejercicio 20(a) Sea $f(x) = x^3 - 3x + 4$. Hallamos f''

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \qquad f''(x) = 6x$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 6x = 0 \Longrightarrow x = 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\cap$	$f(0)$	$\cup$	

Punto de inflexión $I(0, 4)$

$\square$

Ejercicio 20(b) Sea $f(x) = x^4 - 6x^2$. Hallamos f''

$$f'(x) = 4x^3 - 12x \qquad f''(x) = 12x^2 - 12$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 12x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow x = \pm 1$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
f''		$+$	0	$-$	0	$+$	
f		$\cup$	$f(-1)$	$\cap$	$f(1)$	$\cup$	

Puntos de inflexión $I_1(-1, 5) \qquad I_2(1, 5)$

□

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Ejercicio 20(c) Sea $f(x) = (x-2)^4$. Hallamos f''

$$f'(x) = 4(x-2)^3 \qquad f''(x) = 12(x-2)^2$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = 12(x-2)^2 = 0 \Longrightarrow x = 2$$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f''		$+$	0	$+$	
f		$\cup$	$f(2)$	$\cup$	

No tiene puntos de Inflexión. □

◄◄ ►►
◄ ►
◄ Doc Doc ►
Volver Cerrar

Ejercicio 20(d) Sea $f(x) = xe^x$. Hallamos f''

$$f'(x) = (x+1)e^x \qquad f''(x) = (x+2)e^x$$

Resolvemos $f'' = 0$

$$f''(x) = (x+2)e^x = 0 \Longrightarrow (x+2) = 0 \Longrightarrow x = -2$$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
f''		$-$	0	$+$	
f		$\cap$	$f(-2)$	$\cup$	

Punto de inflexión $I(-2, -2e^{-2})$

□

Ejercicio 20(e) Sea $f(x) = \ln(x+1)$. $Dom(f) = (-1, \infty)$. Hallamos f''

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} \qquad f''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$$

- Como $f'' \neq 0$ no tiene puntos de inflexión.
- Como $f'' < 0 \qquad \forall x \in Dom(f)$, es siempre convexa.

□

Ejercicio 20(f) Sea $f(x) = \dfrac{2-x}{x+1}$. $Dom(f) = R - \{-1\}$. Hallamos f''

$$f'(x) = -\frac{3}{(x+1)^2} \qquad f''(x) = \frac{6}{(x+1)^3}$$

- Como $f'' \neq 0$ no tiene puntos de inflexión.
- Concavidad y convexidad:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f''		$-$	$\nexists$	$+$	
f		$\cap$	$\nexists$	$\cup$	

Ejercicio 21. Siendo

$$f(x) = x|x| \Longrightarrow \begin{cases} -x^2 & x \leq 0 \\ x^2 & 0 < x \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2x & x < 0 \\ 2x & 0 < x \end{cases} \qquad f''(x) = \begin{cases} -2 & x < 0 \\ 2 & 0 < x \end{cases}$$

Como

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f''		$-$	$\nexists$	$+$	
f		$\cap$	0	$\cup$	

El punto $x = 0$ es un punto de Inflexión y $f''(0)$ no existe. Ejercicio 21

Soluciones a los Tests

Solución al Test: Puede existir la recta tangente en el punto $(a, f(a))$ sin que exista la derivada en dicho punto. Por ejemplo la función

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

tiene en el origen $x = 0$ como tangente vertical el eje OY y sin embargo

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$$

no existe $f'(0)$. Final del Test

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Solución al Test: Es falso. Para que $x = c$ sea un punto crítico no basta que no exista $f'(c)$, además c tiene que estar en el dominio de f.

Final del Test

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar

Índice alfabético

◀◀ ▶▶
◀ ▶
◀ Doc Doc ▶
Volver Cerrar