6 Derivadas

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Calcular la tasa de variación media de una función en un intervalo.	**1.** Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en los intervalos que se indican. a) $f(x) = \frac{1}{x-1}$ en $[2, 5]$ b) $f(x) = 2x$ en $[1, 4]$ c) $f(x) = 2x^2 - 1$ en $[x, x+h]$
B. Calcular la derivada de una función en un punto aplicando la definición.	**2.** Dada la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$, calcula, aplicando la definición, $f'(0)$ y $f'(3)$.
C. Calcular la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto.	**3.** Halla las rectas tangentes a la curva $f(x) = x^3 - 3x^2 + 8$ que sean paralelas a la recta $9x - y = -4$.
D. Calcular la función derivada de funciones elementales.	**4.** Calcula la función derivada de $f(x) = x^2 - 7x$ aplicando la definición.
E. Calcular la función derivada de funciones obtenidas mediante operaciones algebraicas con funciones elementales.	**5.** Calcula las funciones derivadas de las siguientes funciones: a) $f(x) = x^2 + \frac{3}{x} - \ln x$ c) $f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x}$ e) $f(x) = e^x \operatorname{tg} x$ b) $f(x) = (x^2 + x)\cos x$ d) $f(x) = x^3 \cdot 3^x$ f) $f(x) = \frac{(x^2 + 1)\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$
F. Calcular la función derivada de una función obtenida mediante la composición de dos o más funciones elementales.	**6.** Calcula la función derivada de las siguientes funciones: a) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2+2}{x^4}\right)^3$ b) $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+5x-3}{1-x}}$ c) $f(x) = \operatorname{sen}^3(5x^2 - 2x)$
G. Aplicar las derivadas en la resolución de problemas propios de las ciencias sociales.	**7.** El número de bacterias de un cultivo, en función del tiempo, viene dado por la expresión $f(t) = t^2 + 380t + 500$, en donde t viene expresado en minutos. Calcula: a) La tasa de variación media, o velocidad media de crecimiento en el período [3, 5]. b) La tasa de variación instantánea o velocidad instantánea de crecimiento en el instante $t = 10$. c) La función que nos da la velocidad de crecimiento de dicho cultivo en función del tiempo. **8.** Una empresa ha comprobado que la demanda de artículos de un producto, en función del precio, viene dada por la función $d(x) = 700 - 3x^2$, donde x es la variable precio. Calcula: a) La variación de la demanda si el precio pasa de 5 a 10 €/u. b) La tasa de variación media en los intervalos [5, 10] y [5, 6]. c) La tasa de variación instantánea cuando el precio es de 5 euros. **9.** A partir del año 2000, la tasa de inflación, en tanto por ciento, de un determinado país varió según la función $f(x) = 10\log\sqrt{x+5}$, donde x representa el número de años transcurridos desde el año 2000. a) ¿Cuál fue la tasa de inflación en el año 2005? b) ¿Cuál fue la tasa de variación media de la inflación en el período 2000-2005? c) Calcula el momento en que la velocidad de crecimiento de la tasa de inflación fue del 0,25 anual.

MATERIAL FOTOCOPIABLE

Soluciones

1. a) $TVM\ f[2, 5] = \dfrac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \dfrac{\frac{1}{4} - 1}{3} = -\dfrac{1}{4}$

b) $TVM\ f[1, 4] = \dfrac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \dfrac{8 - 2}{3} = \dfrac{6}{3} = 2$

c) $TVM\ f[x,\ x + h] = \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} =$

$= \dfrac{2(x + h)^2 - 1 - (2x^2 - 1)}{h} =$

$= \dfrac{4xh + 2h^2}{h} = 4x + 2h$

2. $f'(0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0 + h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h \leftarrow 0} \dfrac{h^2 + 2h - 3 - (-3)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 2h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (h + 2) = 2$

$f'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(3 + h) - f(3)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \leftarrow 0} \dfrac{(3 + h)^2 + 2(3 + h) - 3 - 12}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 8h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (h + 8) = 8$

3. Primero hay que hallar los puntos de tangencia. Como la recta tangente es paralela a la $9x - y = 4$, se tiene que cumplir que las pendientes de ambas rectas sean iguales.

Por tanto, los puntos de tangencia son aquellos cuya abscisa verifica $f'(x) = 9$:

$3x^2 - 6x = 9 \Rightarrow x = -1,\ x = 3$

Si $x = -1$, $f(-1) = 4$ y la tangente será $y - 4 = 9(x + 1)$.

Si $x = 3$, $f(3) = 8$ y la tangente será $y - 8 = 9(x - 3)$.

4. $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(x + h)^2 - 7(x + h) - (x^2 - 7x)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 2xh - 7h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (h + 2x - 7) = 2x - 7$

5. a) $f'(x) = 2x - \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{1}{x}$

b) $f'(x) = (2x + 1)\cos x - (x^2 + x)\operatorname{sen} x$

c) $f'(x) = \dfrac{\cos x(1 + \cos x) + \operatorname{sen}^2 x}{(1 + \cos x)^2} =$

$= \dfrac{\cos x + \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{(1 + \cos x)^2} =$

$= \dfrac{\cos x + 1}{(1 + \cos x)^2} = \dfrac{1}{1 + \cos x}$

d) $f'(x) = 3x^2 \cdot 3^x + x^3 \cdot \ln 3 \cdot 3^x$

e) $f'(x) = e^x \operatorname{tg} x + e^x \dfrac{1}{\cos^2 x}$

f) $f'(x) = \dfrac{\left[2x\operatorname{sen} x + (x^2 + 1)\cos x\right]\sqrt{x} - \dfrac{(x^2 + 1)\operatorname{sen} x}{2\sqrt{x}}}{x} =$

$= \dfrac{(x^2 - 1)\operatorname{sen} x + x(x^2 + 1)\cos x}{x\sqrt{x}}$

6. a) $f(x) = 3[\ln(x^2 + 2) - 4\ \ln x]$

$f'(x) = 3\left(\dfrac{2x}{x^2 + 2} - \dfrac{4}{x}\right) = \dfrac{-6x^2 - 24}{x(x^2 + 2)}$

b) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^2 + 5x - 3}{1 - x}}} \cdot \dfrac{(2x + 5)(1 - x) + x^2 + 5x - 3}{(1 - x)^2} =$

$= \dfrac{-x^2 + 2x + 2}{2(1 - x)^2}\sqrt{\dfrac{1 - x}{x^2 + 5x - 3}}$

c) $f'(x) = 3\operatorname{sen}^2(5x^2 - 2x) \cdot \cos(5x^2 - 2x) \cdot (10x - 2)$

7. a) $TVM\ f[3, 5] = \dfrac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \dfrac{2425 - 1649}{2} = 388$

b) $TVI\ f(10) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(10 + h) - f(10)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{(10 + h)^2 + 380(10 + h) + 500 - 8900}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{h^2 + 400h}{h} = \lim\limits_{h \to o} (h + 400) = 400$

c) $V(t) = f'(x) = 2t + 380$

8. a) $d(10) = 700 - 300 = 400$
$d(5) = 700 - 75 = 625$
$d(10) - d(5) = -225$

b) $TVM\ d[5, 10] = \dfrac{d(10) - d(5)}{10 - 5} = \dfrac{-225}{5} = -45$

$TVM\ d[5, 6] = \dfrac{d(6) - d(5)}{6 - 5} = \dfrac{592 - 625}{1} = -33$

c) $TVI\ d(5) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{d(5 + h) - d(5)}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{700 - 3(5 + h)^2 - 625}{h} =$

$= \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{-3h^2 - 30h}{h} = \lim\limits_{h \to 0} (-3h - 30) = -30$

9. a) $f(5) = 10\log\sqrt{10} = 10 \cdot \dfrac{1}{2} = 5.$
La tasa de inflación en el 2005 fue del 5%.

b) $TVM\ f[0, 5] = \dfrac{f(5) - f(0)}{5 - 0} = \dfrac{5 - 3{,}49}{5} = \dfrac{1{,}51}{5} = 0{,}3.$
La media de la inflación en esos cinco años fue del 0,3% anual.

c) $f(x) = 5\log(x + 5)$, $f'(x) = \dfrac{5}{(x + 5)\ln 10}$
$f'(x) = 0{,}25 \Rightarrow x \approx 3{,}68$
Entre el tercero y cuarto año, la velocidad de crecimiento de la tasa de inflación fue del 0,25%.

7 Aplicaciones de las derivadas

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Calcular las derivadas sucesivas de funciones elementales.	**1.** Calcula las tres primeras derivadas de las siguientes funciones. a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ b) $g(x) = \ln x$ c) $h(x) = x^n$
B. Calcular los intervalos de crecimiento y decrecimiento de una función derivable. **C.** Determinar los intervalos de concavidad hacia arriba y hacia abajo de una función derivable. **D.** Calcular los máximos y mínimos relativos de una función derivable. **E.** Calcular los puntos de inflexión de una función derivable.	**2.** En cada caso, calcula los intervalos de crecimiento y de decrecimiento, así como los máximos y mínimos de las funciones indicadas. a) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ b) $g(x) = e^x(x^2 - 15)$ **3.** En cada caso, calcula los intervalos de concavidad hacia arriba y concavidad hacia abajo, así como los puntos de inflexión de las funciones indicadas. a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 12x^2 + 5$ b) $g(x) = \dfrac{x^2 + 5}{x^2 - 4}$ **4.** Determina los parámetros a, b, c y d para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un punto de inflexión en $P(-2, 6)$ con tangente en él paralela a la recta $8x + y + 10 = 0$, y además tome el valor -2 para $x = 0$.
F. Resolver problemas de optimización en distintos contextos.	**5.** La cantidad de agua recogida en 1995, en millones de litros, en cierto pantano viene dada, en función del tiempo medido en meses, a través de la expresión $f(t) = \dfrac{10}{(t-6)^2 + 1}$ con $0 \leqslant t \leqslant 12$. a) ¿En qué período de tiempo aumentó la cantidad de agua recogida? b) ¿En qué instante se obtuvo la cantidad máxima de agua? ¿Cuál fue esa cantidad? **6.** La función de costes por unidad de tiempo asociada a los inventarios en unos almacenes viene dada por la función $c(x) = \dfrac{10x^2 - 20x + 250}{x^2}$, donde x indica el tamaño de los pedidos para renovar existencias, y $c(x)$ se mide en miles de euros por año. Calcula el tamaño de pedidos que hace que $c(x)$ alcance su valor mínimo, así como dicho valor. **7.** Si el precio del marco de una ventana es de 1,20 € por cada metro de altura y 1,92 € por metro de ancho, calcula las dimensiones que debe tener un ventanal de 1 m^2 de área para que el coste del marco sea mínimo.
G. Determinar el número de raíces reales de una función polinómica cuya función derivada es fácilmente factorizable.	**8.** Demuestra que $x = 0$ es la única raíz real del polinomio $5x^9 + 3x^5 + 7x = 0$

MATERIAL FOTOCOPIABLE

1. a) $f'(x) = \cos x$ $f''(x) = -\operatorname{sen} x$ $f'''(x) = -\cos x$

b) $g'(x) = \dfrac{1}{x}$ $g''(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ $g'''(x) = \dfrac{2}{x^3}$

c) $h'(x) = nx^{n-1}$ $h''(x) = n(n-1)x^{n-2}$
$h'''(x) = n(n-1)(n-2)x^{n-3}$

2. a) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow 4x(x-1)(x+1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 0,\ x = -1$ y $x = 1$

Estudiamos el signo de $f'(x)$ en los intervalos determinados por los puntos anteriores.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo de f'	$-$	$+$	$-$	$+$

$f(x)$ es creciente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$.
$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.
$(-1, 0)$ y $(1, 0)$ son mínimos relativos de $f(x)$.
$(0, 0)$ es máximo relativo de $f(x)$.

b) $g'(x) = e^x(x^2 - 15) + 2xe^x = e^x(x^2 + 2x - 15) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow x = -5$ y $x = 3$

Estudiamos el signo de $g(x)$ en los intervalos determinados por los puntos anteriores.

	$(-\infty, -5)$	$(-5, 3)$	$(3, +\infty)$
Signo de g'	$+$	$-$	$+$

$g(x)$ es creciente en $(-\infty, -5) \cup (3, +\infty)$.
$g(x)$ es decreciente en $(-5, 3)$.
$\left(-5, \dfrac{10}{e^5}\right)$ es máximo relativo de $g(x)$.
$(3, -6e^3)$ es mínimo relativo de $g(x)$.

3. a) $f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 24x$
$f''(x) = 12x^2 + 12x - 24 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1$ y $x = -2$

Estudiamos el signo de $f''(x)$ en los intervalos determinados por los puntos anteriores.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
Signo de f''	$+$	$-$	$+$

$f(x)$ es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.
$f(x)$ es cóncava hacia abajo en $(-2, 1)$.
$(-2, -43)$ y $(1, -4)$ son los puntos de inflexión de $f(x)$.

b) $g'(x) = \dfrac{2x(x^2-4) - 2x(x^2+5)}{(x^2-4)^2} = \dfrac{-18x}{(x^2-4)^2}$

$$g''(x) = \frac{-18(x^2-4)^2 + 72x^2(x^2-4)}{(x^2-4)^4} = \frac{18(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

$g''(x)$ no se anula nunca. Estudiamos su signo en los intervalos determinados por los puntos que no pertenecen al dominio.

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
Signo de g''	$+$	$-$	$+$

$g(x)$ es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.
$g(x)$ es cóncava hacia abajo en $(-2, 2)$.
Como $g''(x)$ no se anula, $g(x)$ no tiene puntos de inflexión.

4. Las condiciones que da el problema se traducen en:
$P(-2, 6)$ punto de inflexión $\Rightarrow f(-2) = 6$ y $f''(-2) = 0$.
La tangente en P es paralela a $8x + y = 0 \Rightarrow f'(-2) = -8$.
$f(x)$ toma el valor -2 para $x = 0 \Rightarrow f(0) = -2$.
$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
$f''(x) = 6ax + 2b$
$f(-2) = 6 \Rightarrow -8a + 4b - 2c + d = 6$
$f''(-2) = 0 \Rightarrow -12a + 2b = 0$
$f'(-2) = -8 \Rightarrow 12a - 4b + c = -8$
$f(0) = -2 \Rightarrow d = -2$
Resolviendo el sistema formado por las anteriores ecuaciones, resulta que $a = 1$, $b = 6$, $c = 4$ y $d = -2$.

5. $f'(t) = \dfrac{-20(t-6)}{\left[(t-6)^2 + 1\right]^2} = 0 \Leftrightarrow t = 6$

	$(0, 6)$	$(6, 12)$
Signo de f'	$+$	$-$

a) La cantidad de agua recogida aumentó durante los 6 primeros meses.

b) La mayor cantidad de agua se obtuvo en el sexto mes: 10 millones de litros.

6. $c'(x) = \dfrac{(20x-20)x^2 - 2x(10x^2 - 20x + 250)}{x^4} =$

$= \dfrac{20(x-25)}{x^3} = 0 \Leftrightarrow x = 25$

	$(0, 25)$	$(25, +\infty)$
Signo de g'	$-$	$+$

Hay que hacer 25 pedidos para obtener un coste mínimo, siendo dicho coste de 9600 euros.

7. Sean x e y la altura y la anchura de la ventana.
El coste es $C(x, y) = 2{,}4x + 3{,}84y$.
Como la superficie de la ventana es de 1 m², $xy = 1$, lo que implica que $y = \dfrac{1}{x}$ y, por tanto, la función coste, que es la que hay que minimizar, puede expresarse como

$C(x) = 2{,}4x + \dfrac{3{,}84}{x} = \dfrac{2{,}4x^2 + 3{,}84}{x}$.

$C'(x) = \dfrac{4{,}8x^2 - 2{,}4x^2 - 3{,}84}{x^2} = \dfrac{2{,}4x^2 - 3{,}84}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = +1{,}26$. El posible mínimo sería 1,26 m.

Como $C'(x) = \dfrac{3{,}84}{x^3}$ y $C(1{,}26) = 1{,}92 > 0, 1{,}26$ es mínimo y, por tanto, las dimensiones de la venta deben ser $0{,}79 \times 1{,}26$, siendo el coste de 6,07 €.

8. Está claro que $x = 0$ es una raíz de este polinomio.
Supongamos que $x = a$ es otra raíz del polinomio.
Aplicando el teorema de Rolle a la función continua y derivable $f(x) = 5x^9 + 3x^5 + 7$ en el intervalo $[0, a]$, existiría $c = (0, a)$ tal que $f'(c) = 45c^8 + 15c^4 + 7 = 0$, y eso es imposible, ya que $15^2 - 4 \cdot 45 \cdot 7 = -1035$. Por tanto, el polinomio tiene una sola raíz.

8 Representación de funciones

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Calcular la tendencia de una función en el infinito y en las proximidades de puntos aislados en los que no está definida.	**1.** Dada la función $f(x) = \frac{x+2}{x^2 - x}$, calcula su dominio y su tendencia en las proximidades de los puntos en los que no está definida.
B. Calcular las asíntotas de una función.	**2.** Halla las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^2 - 2}{x}$,
C. Calcular los puntos de corte con los ejes de una función y el dominio de una función dada por su expresión algebraica, su gráfica o mediante un enunciado.	**3.** Calcula el dominio de las siguientes funciones. a) $f(x) = \frac{1}{2x^2 - 5x + 2}$ b) $g(x) = \sqrt{\frac{(x-1)}{(x+2)}}$ **4.** Estudia el signo de $f(x) = \frac{x^3 - 27}{x + 5}$.
D. Estudiar la simetría, la periodicidad y el signo de una función.	**5.** Estudia si las siguientes funciones son pares, impares o no son simétricas. a) $f(x) = \frac{x}{x^2 + 2}$ b) $g(x) = e^x(x^2 - 6)$
E. Representar gráficamente funciones polinómicas, racionales, con radicales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas, tras hacer un estudio completo de sus características.	**6.** Dada la función $f(x) = \frac{x^2 + 9}{x^2 - 4}$, a) Estudia su monotonía y los máximos y mínimos relativos. b) Determina las asíntotas. c) Determina la curvatura y los puntos de inflexión. d) Con los datos obtenidos, esboza la gráfica de la función y de las funciones $f(x) + 3$, $\lvert f(x)\rvert$ y $f(x + 3)$.
F. Resolver ejercicios propios de las ciencias sociales que conlleven el estudio, la representación gráfica o el análisis de la gráfica asociada a la evolución de cierto fenómeno económico o social.	**7.** Los resultados financieros de una empresa, en miles de euros y en relación con el número x de años que lleva funcionando, vienen dados por la expresión $f(x) = 30 - \frac{60}{x}$ a) ¿Qué resultados obtuvo durante el primer año de su actividad? b) ¿En qué momento comenzó a producir beneficios? c) ¿Hay algún momento en que alcance beneficios máximos? d) ¿Consideras rentable la empresa? ¿Por qué? **8.** Los ingresos y los gastos de una empresa que se constituyó en 2000, en función del tiempo medido en años, vienen dados por las siguientes funciones: $I(x) = x^3 + x^2$ $G(x) = x^3 + 2x^2 - 9x + 8$ Teniendo en cuenta que la empresa cierra después de dos años seguidos con pérdidas: a) Escribe la función beneficio y calcula en qué año la empresa no tuvo beneficios. b) Determina el período en el que permaneció abierta. c) Haz una gráfica conjunta en la que se representen las funciones ingresos, gastos y beneficios.

MATERIAL FOTOCOPIABLE

Soluciones

1. $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ y $x = 1 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x+2}{x^2-x} = \left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{x+2}{x^2-x} = \left[\frac{2}{0^-}\right] = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x+2}{x^2-x} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty \quad \lim_{x\to 1^-} \frac{x+2}{x^2-x} = \left[\frac{3}{0^-}\right] = -\infty$$

2. A.V.: $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{x^2-2}{x} = \left[\frac{-2}{0^-}\right] = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2-2}{x} = \left[\frac{-2}{0^+}\right] = -\infty$

$x = 0$ es asíntota vertical.

A. H.: $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2-2}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2-2}{x} = +\infty$

La función no tiene asíntotas horizontales.

A. O.: $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^2-2}{x^2} = 1$; $n = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{x^2-2}{x} - x\right) = 0$

$y = x$ es asíntota oblicua.

3. a) $2x^2 - 5x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ y $x = \frac{1}{2}$

$D(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$

b) $D(g) = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \frac{x-1}{x+2} \geqslant 0 \text{ y } x + 2 \neq 0\right\}$

	$(-\infty, -2)$	$(-2, 1)$	$(1, +\infty)$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$
$\frac{x-1}{x+2}$	$+$	$-$	$+$

$D(g) = (-\infty, -2) \cup [1, +\infty)$

4. $\frac{x^3 - 27}{x+5} = \frac{(x-3)(x^2+3x+9)}{x+5}$

	$(-\infty, -5)$	$(-5, 3)$	$(3, +\infty)$
$x - 3$	$-$	$-$	$+$
$x^2 + 3x + 9$	$+$	$+$	$+$
$x + 5$	$-$	$+$	$+$
Signo f	$+$	$-$	$+$

5. a) $f(-x) = \frac{-x}{x^2+2} = -f(x)$. Impar.

b) $g(-x) = e^{-x}(x^2 - 6)$. No es simétrica.

6. a) $f'(x) = \frac{-26x}{(x^2-4)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

$f(x)$ es creciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$.

$f(x)$ es decreciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.

$\left(0, -\frac{9}{4}\right)$ es máximo relativo. Mínimos no tiene.

b) A. V.: $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{x^2+9}{x^2-4} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to -2^+} \frac{x^2+9}{x^2-4} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{x^2+9}{x^2-4} = -\infty$; $\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{x^2+9}{x^2-4} = +\infty$

$x = -2$ y $x = 2$ son asíntotas verticales.

A. H.: $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{x^2+9}{x^2-4} = 1$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^2+9}{x^2-4} = 1$

$y = 1$ es asíntota horizontal.

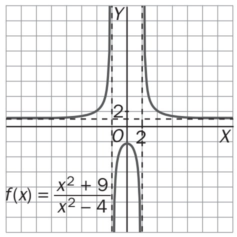
c) $f''(x) = -26\frac{3x^2+4}{(x^2-4)^3}$ no se anula nunca; por tanto, f no presenta puntos de inflexión.

Teniendo en cuenta los puntos en los que no está definida, se tiene que:

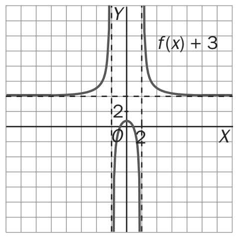
$f(x)$ es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$.

$f(x)$ es cóncava hacia abajo en $(-2, 2)$.

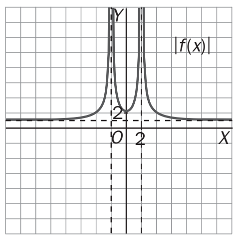
d) Gráfica de f



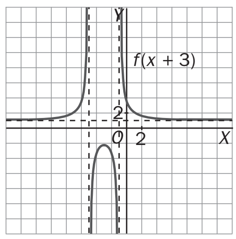
Gráfica de $f(x) + 3$



Gráfica de $|f(x)|$



Gráfica de $f(x + 3)$



7. a) $f(1) = -30$. No obtuvo beneficios.

b) $f'(x) = \frac{60}{x^2}$ es siempre positiva. Los beneficios siempre crecen y, por tanto, habrá un momento en que serán igual a 0. Esto sucede cuando $f(x) = 0$, es decir, cuando $x = 2$.

c) Como la función es siempre creciente, no hay beneficios máximos.

d) Sí es rentable, porque produce beneficios año tras año.

8. a) La función beneficio es:

$$B(x) = I(x) - G(x) = -x^2 + 9x - 8$$

que es una parábola abierta hacia abajo y corta el eje X en $(1, 0)$ y en $(8, 0)$, y a partir de este punto la parábola es negativa; por tanto, a partir del octavo año, la empresa no obtiene beneficios.

b) La empresa permaneció abierta durante 10 años.

c)