11 Cálculo de probabilidades

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

A. Formar el espacio muestral y calcular el número de puntos muestrales de un suceso.

B. Efectuar operaciones con sucesos y aplicar sus propiedades para realizar simplificaciones.

C. Identificar funciones de probabilidad definidas en un espacio muestral, comprobando el cumplimiento de los axiomas, y utilizarlas para obtener la probabilidad de sucesos compuestos.

D. Asignar probabilidades mediante la regla de Laplace, empleando técnicas de recuento directo y recursos combinatorios.

E. Determinar si dos sucesos son dependientes o independientes, y calcular la probabilidad de su intersección.

F. Formar el sistema completo de sucesos asociado a un experimento aleatorio compuesto y asignar probabilidades a sucesos mediante el teorema de la probabilidad total.

G. Calcular probabilidades a posteriori.

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

1. En una urna hay ocho bolas numeradas del 2 al 9. Se realiza un experimento consistente en extraer una bola de dicha urna.

a) Escribe el espacio muestral de dicho experimento.
b) ¿Cuántos sucesos distintos tiene el espacio de sucesos asociado a dicho experimento?
c) Escribe los sucesos A = “sacar un número primo”, B = “sacar un número cuadrado perfecto”, C = “sacar un número mayor que 5”.
d) Escribe los sucesos $A \cup B$, $A \cup C$, $B \cup C$, $A \cup B \cup C$ y $A \cap B \cap C$.
e) ¿Son A y B compatibles? ¿Y A y C? ¿Y B y C?
f) Escribe los contrarios de A, B y C.
g) Escribe los sucesos $\overline{A \cap B}$, $\overline{A \cup (B \cap C)}$ y $A \cap \overline{(B \cup C)}$.

2. Se consideran dos sucesos, A y B, asociados a un experimento aleatorio con $P(A) = 0{,}7$; $P(B) = 0{,}6$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}58$.

a) ¿Son independientes A y B?
b) Si $M \subset A$, ¿cuál es el valor de $P(\overline{M}/\overline{A})$?

3. Se escogen al azar dos números de teléfono y se observa la última cifra de cada uno. Determina las probabilidades siguientes:

a) Que las dos cifras sean iguales.
b) Que su suma sea 11.
c) Que su suma sea mayor que 7 y menor que 13.

4. Sean A y B dos sucesos de un experimento aleatorio tales que $P(A) = 0{,}6$; $P(B) = 0{,}2$ y $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 0{,}7$.

a) Calcula $P(A \cap B)$ y razona si los sucesos A y B son independientes.
b) Calcula $P(A \cup B)$.

5. El 12% de los habitantes de un país padece cierta enfermedad. Para el diagnóstico de esta se dispone de un procedimiento que no es completamente fiable, ya que da positivo en el 90% de los casos de personas realmente enfermas, pero también da positivo en el 5% de personas sanas.

a) Elegida una persona al azar, ¿qué probabilidad tiene de que le haya dado positiva la prueba?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que esté sana una persona a la que el procedimiento le ha dado positivo?

6. Tres máquinas, A, B y C, producen el 45%, el 30% y el 25%, respectivamente, del total de las piezas producidas en una fábrica. Los porcentajes de producción defectuosa de estas máquinas son del 3%, 4% y 5%.

a) Si se selecciona una pieza al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuosa?
b) Tomando al azar una pieza, esta resulta ser defectuosa; calcula la probabilidad de que haya sido producida por la máquina B.
c) ¿Qué máquina tiene la mayor probabilidad de haber producido la citada pieza defectuosa?

7. La urna A tiene 3 bolas rojas y 5 negras; la B, 2 rojas y 1 negra, y la C, 2 rojas y 3 negras. Si se escoge una urna al azar y se extrae una bola que resulta ser roja, ¿cuál es la probabilidad de que haya sido extraída de la urna A?

Soluciones

1. a) $E = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

b) El espacio de sucesos tiene $2^8 = 256$ sucesos distintos.

c) $A = \{2, 3, 5, 7\}$, $B = \{4, 9\}$, $C = \{6, 7, 8, 9\}$

d) $A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 7, 9\}$, $A \cup C = \{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9\}$,

$B \cup C = \{4, 6, 7, 8, 9\}$, $A \cup B \cup C = E$, $A \cap B \cap C = \varnothing$

e) A y B no son compatibles, ya que $A \cap B = \varnothing$.

A y C son compatibles, ya que $A \cap C = \{7\}$.

B y C son compatibles, ya que $B \cap C = \{9\}$.

f) $\bar{A} = \{4, 6, 8, 9\}$, $\bar{B} = \{2, 3, 5, 6, 7, 8\}$, $\bar{C} = \{2, 3, 4, 5\}$

g) $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} = E$

$$\overline{A \cup (B \cap C)} = \bar{A} \cap (\overline{B \cap C}) = \bar{A} \cap (\bar{B} \cup \bar{C}) = \\ = (\bar{A} \cap \bar{B}) \cup (\bar{A} \cap \bar{C}) = \{4, 6, 8\}$$

$$A \cap (\overline{B \cap C}) = A \cap (\bar{B} \cap \bar{C}) = A \cap \{2, 3, 5\} = \{2, 3, 5\}$$

2. a) $(\bar{A} \cup \bar{B}) = \overline{A \cap B} \Rightarrow P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 0,58 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cap B) = 1 - 0,58 = 0,42 = P(A) \cdot P(B) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ A y B son independientes.

b) $M \subset A \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{M} \Rightarrow P(\bar{M}/\bar{A}) = \dfrac{P(\bar{M} \cap \bar{A})}{P(\bar{A})} = \dfrac{P(\bar{A})}{P(\bar{A})} = 1$

3. a) $P(a \cap a) = P(a) \cdot P(a\ /\ a) = 1 \cdot \dfrac{1}{10} = 0,1$

b) Las dos cifras suman 11 en los siguientes casos: (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6), (6, 5), (7, 4), (8, 3) y (9, 2).

Como el número total de posibilidades para las dos terminaciones es 100, desde (0, 0) hasta (9, 9), tenemos que $P(S = 11) = \dfrac{\text{casos fav}}{\text{casos posib}} = \dfrac{8}{100} = 0,08$.

c) Para que la suma sea mayor que 7 y menor que 13 tenemos los siguientes casos favorables:

$S = 8$: (0, 8), (1, 7), (2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2), (7, 1) y (8, 0)

$S = 9$: (0, 9), (1, 8), (2, 7), (3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3), (7, 2), (8, 1) y (9,0)

$S = 10$: (1, 9), (2, 8), (3, 7), (4, 6), (5, 5), (6, 4), (7, 3), (8, 2) y (9, 1)

$S = 11$: (2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6), (6, 5), (7, 4), (8, 3) y (9, 2)

$S = 12$: (3, 9), (4, 8), (5, 7), (6, 6), (7, 5), (8, 4) y (9, 3)

En total, 43 casos; por tanto: $P(7 < S < 13) = \dfrac{43}{100} = 0,43$

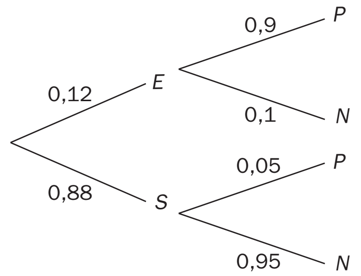
4. a) $(\bar{A} \cup \bar{B}) = \overline{A \cap B} \Rightarrow P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 0,7 \Rightarrow$

$\Rightarrow P(A \cap B) = 1 - 0,7 = 0,3 \neq P(A) \cdot P(B) = 0,12 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ A y B son dependientes.

b) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,6 + 0,2 - 0,3 = 0,5$

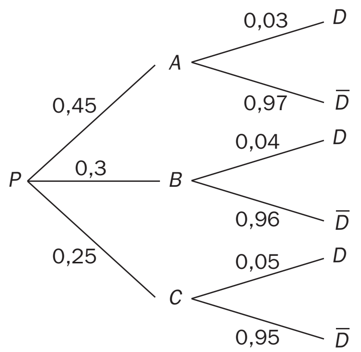
5. El diagrama de árbol correspondiente a este sistema de sucesos es:



a) $P(P) = P(E) \cdot P(P/E) + P(S) \cdot P(P/S) =$
$= 0,12 \cdot 0,9 + 0,88 \cdot 0,05 = 0,152$

b) $P(S/P) = \dfrac{P(S) \cdot P(P/S)}{P(P)} =$
$= \dfrac{0,88 \cdot 0,05}{0,12 \cdot 0,9 + 0,88 \cdot 0,05} = 0,289$

6. El diagrama de árbol correspondiente a este sistema de sucesos es:



a) $P(D) = P(A) \cdot P(D/A) + P(B) \cdot P(D/B) + P(C) \cdot P(D/C) =$
$= 0,038$

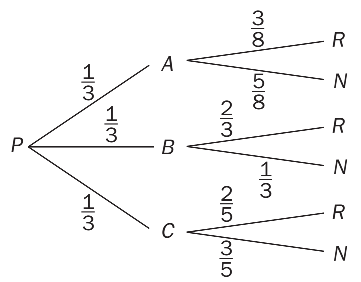
b) $P(B/D) = \dfrac{P(B) \cdot P(D/B)}{P(D)} = \dfrac{0,3 \cdot 0,04}{0,038} = 0,3158$

c) $P(A/D) = \dfrac{P(A) \cdot P(D/A)}{P(D)} = \dfrac{0,45 \cdot 0,03}{0,038} = 0,3553$

$P(C/D) = \dfrac{P(C) \cdot P(D/C)}{P(D)} = \dfrac{0,25 \cdot 0,05}{0,038} = 0,3289$

Por tanto, lo más probable es que la pieza defectuosa proceda de la máquina A.

7. El diagrama de árbol correspondiente a este sistema de sucesos es:



$$P(A/R) = \frac{P(A) \cdot P(R/A)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}} = 0,26$$