TEMA 6: CÁLCULO DE PROBABILIDADES.

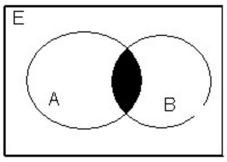
1. Experimentos aleatorios.
2. Operaciones con sucesos.
3. Probabilidad. Regla de Laplace
4. Probabilidad condicionada. Suceso Independiente.
5. Tabla de contingencia
6. Experimentos compuestos. Teorema de la probabilidad total
7. Teorema de Bayes
8. Diagrama de árbol

1. EXPERIMENTOS ALEATORIOS. SUCESOS.

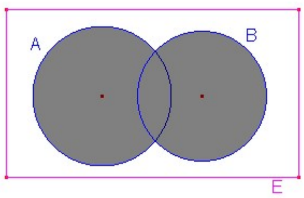
Experimento: Someter a un objeto a una serie de pruebas para ver el resultado.
Experimentos deterministas: aquél que siempre realizado bajo las mismas condiciones sale el mismo resultado: caída libre, reacciones químicas, etc.
Experimento aleatorios: aquellos que repetidos en las mismas condiciones da resultados diferentes: lanzamiento de un dado, predicción del tiempo, lanzamiento de una moneda.
Definiciones básicas
Espacio muestral del experimento al conjunto de todos los posibles resultados de dicho experimento.
Al espacio muestral lo representaremos por E (o bien por la letra griega omega Ω).
Suceso: Es cualquier subconjunto del espacio muestral.
Suceso elemental: Es cada elemento sencillo que forma parte del espacio muestral.
Suceso Seguro: Aquel que siempre ocurre, es decir, es igual al espacio muestral (E).
Suceso Imposible: Aquel que nunca ocurre, es decir, es un conjunto vacío (ø)
Propiedad: Si un experimento tiene "n" sucesos elementales, entonces el experimento tiene 2^n sucesos.
Ejemplo: ¿Cuál es el espacio muestral asociado al experimento de lanzar un dado normal al aire y observar
la cara que queda hacia arriba?. Hay 6 sucesos elementales y el espacio muestral estará formado por: E={1,2,3,4,5,6}. Hay $2^6=64$ posibles sucesos.
A=Salir nº par={2,4,6}; B=Salir mayor que 2={3,4,5,6}
Y en el caso del lanzamiento de una moneda? Entonces E={C,X} *y* habrá $2^2=4$ sucesos.

2. OPERACIONES CON SUCESOS

Si realizamos un experimento aleatorio y consideramos varios sucesos A, B, C, etc, asociados a dicho experimento, podemos realizar varias operaciones entre ellos. Los más importantes son:
Intersección de sucesos: Llamaremos suceso intersección de los sucesos A y B, y lo representaremos
por $A \cap B$, al suceso "ocurren A y B a la vez".



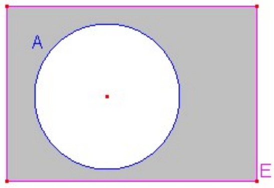
Ejemplo: Si tiramos un dado A=Salir nº par={2,4,6}; B=Salir mayor que 2={3,4,5,6}
El suceso $A \cap B$= {4,6} (Elementos que están en los dos)
Sucesos *incompatibles*, su intersección es vacía $A \cap B = ø$.
Ejemplo: A= Sacar nº par, B= Sacar un 3 ó 5.



Unión de sucesos: Llamaremos suceso unión de los sucesos A y B y se representa por $A \cup B$ al suceso "ocurre A o bien ocurre B o bien ocurren ambos a la vez"(también podemos decir que "ocurre alguno").

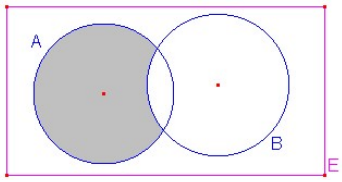
Es decir $A \cup B$ son los elementos que están en ambos conjuntos (aunque no necesariamente en los dos a la vez

Ejemplo: En el caso anterior: $A \cup B$ ={2,3,4,5,6}



<u>Suceso contrario</u> de otro: Dado un suceso A, denominaremos *suceso contrario* de A y se representa por A´ ó A^C ó Ā al suceso que tiene por elementos a todos aquellos que no pertenecen a A.

Ejemplo: A="sacar un nº par"={2,4,6}, por tanto A^C={1,3,5} y }; B=Salir mayor que 2={3,4,5,6} B^C={1,2}



<u>Diferencia de sucesos</u>: Si A y B son dos sucesos, llamaremos diferencia entre A y B al suceso $B-A$, que consta de los elementos que están en B pero no están en A. Por ejemplo, si A={2,4,6}, B={3,4,5,6}, tenemos que $B-A$={3,5}. Se cumple que $B-A = B-(A\cap B)$, y también que $B-A = A^C \cap B$.

Propiedades de las operaciones con sucesos:

Las operaciones con sucesos tienen las siguientes propiedades, la mayoría de ellas bien conocidas:

	Intersección	Unión
Conmutativa	$A\cap B = B\cap A$	$A\cup B = B\cup A$
Asociativa	$A\cap(B\cap C) = (A\cap B)\cap C$	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$
Idempotente	$A\cap A = A$	$A\cup A = A$
Simplificación	$A\cap(A\cup B) = A$	$A\cup(A\cap B) = A$
Distributiva	$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
Elemento neutro	$A\cap E = A$	$A\cup \emptyset = A$
Absorción	$A\cap\emptyset=\emptyset$	$A\cup E = E$
Leyes de De Morgan	$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$	$A^C\cup B^C=(A\cap B)^C$

3. ASIGNACIÓN DE PROBABILIDADES. REGLA DE LAPLACE

A. <u>Regla de Laplace</u>:

Si realizamos un experimento aleatorio en el que hay n sucesos elementales, todos igualmente probables, entonces si A es un suceso, la probabilidad de que ocurra el suceso A es:

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{nº de casos favorables al suceso A}}{\text{nº de casos posibles}}}$$

Ejemplo: Lanzamos un dado normal al aire. Consideramos el suceso A= "sale par". Calcular p(A)=3/6=1/2.

El inconveniente que plantea la definición de Laplace es que necesariamente los sucesos elementales tienen que tener la misma probabilidad de ocurrir.

B. <u>Definición axiomática de probabilidad</u>:

Una probabilidad p es una función que asocia a cada suceso A del espacio de sucesos S , un número real P(A), es decir: $p: S \longrightarrow \mathbb{R}$, y que cumple las propiedades:

1. $0 \le p(A) \le 1$, (es decir, cualquier suceso tiene probabilidad positiva y menor o igual que 1).
2. $p(E) = 1$ (la probabilidad del suceso seguro es 1).
3. Si A y B son incompatibles, es decir $A\cap B = \emptyset$, entonces $P(A\cup B) = P(A) + P(B)$

C. <u>Propiedades:</u>

1. $P(A^C) = 1 - P(A)$
2. $P(\emptyset) = 0$
3. Si $A \subseteq B$ (A está incluido en B) entonces $P(B) = P(A) + P(B-A)$

4. Si $A \subseteq B$ (A está incluido en B) entonces $P(A) \leq= P(B)$

5. Si $A_1, A_2, \cdots, A_K$ son incompatibles dos a dos, entonces
$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_K) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_K)$

6. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

4. PROBABILIDAD CONDICIONADA. SUCESOS INDEPENDIENTES.

Sea A un suceso aleatorio asociado a un experimento aleatorio, y sea B otro suceso que sabemos que se ha realizado. Llamaremos ***probabilidad de A condicionada a B*** y lo expresaremos por $P(A/B)$ a la expresión:

$$\boxed{P\left(A/B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}}$$

Sucesos independientes:

Dos sucesos A y B se dicen que son independientes si $P(A/B) = P(A)$, (el hecho de que ocurra B no modifica la probabilidad de A).

Propiedad:

A y B son **sucesos independientes** $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).}$

5. TABLAS DE CONTINGENCIA

Las tablas de contingencia están referidas al estudio de dos características en un mismo experimento aleatorio. Cada característica presenta dos o más posibles resultados.
Se colocan en una tabla de la siguiente manera (pueden ser número de individuos, porcentajes, probabilidades, ...)

Car B / Car A	A_1	A_2	A_3	Total B
B_1	$A_1 \cap B_1$	$A_2 \cap B_1$	$A_3 \cap B_1$	TOTAL B_1
B_2	$A_1 \cap B_2$	$A_2 \cap B_2$	$A_3 \cap B_2$	TOTAL B_2
Total A	TOTAL A_1	TOTAL A_2	TOTAL A_3	TOTAL

Ejemplo: En un taller se sabe que acuden, por la mañana 3 automóviles con problemas de eléctricos,
8 con problemas mecánicos y 3 con problemas de chapa. Por la tarde hay 2 con problemas eléctricos,
3 con problemas mecánicos y 1 con problemas de chapa.
a) Calcular el porcentaje de los que acuden por la tarde.
b) Calcular el porcentaje de los que acuden con problemas mecánicos
c) Calcular la probabilidad de que un automóvil con problemas eléctricos acuda por la mañana.

Problemas / Horario	Eléctricos	Mecánicos	Chapa	Total
Mañana	3	8	3	3+8+3=14
Tarde	2	3	1	2+3+1=6
Total	3+2=5	8+3=11	3+1=4	14+6=5+11+4=20

a) P(T)=6/20=3/10=30%
b) P(Mec)=11/20=55%
c) P(Ma/E)=3/5=0.6

6. EXPERIMENTOS COMPUESTOS. TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL.

Un experimento compuesto es aquel que consta de dos o más experimentos aleatorios simples. Es decir, si tiramos un dado, o una moneda, son experimentos aleatorios simples, pero si realizamos el experimento de tirar un dado y posteriormente una moneda, estamos realizando un experimento compuesto.

Propiedad:

De la fórmula para calcular la probabilidad condicionada se deduce inmediatamente que:

$p(A \cap B) = p(B) \cdot p(A/B)$ y $p(A \cap B) = p(A) \cdot p(B/A)$

La forma más sencilla de calcular probabilidades en experimentos compuestos es un diagrama de árbol, donde en cada rama situamos la probabilidad que le corresponde al suceso del final de dicha rama. Estas probabilidades que se van poniendo en el árbol son probabilidades condicionadas, porque dependen de los resultados anteriores.

Teorema de la probabilidad total: Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos incompatibles 2 a 2, y cuya unión es el espacio muestral $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E)$, y B es otro suceso, resulta que:

$$\boxed{P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$

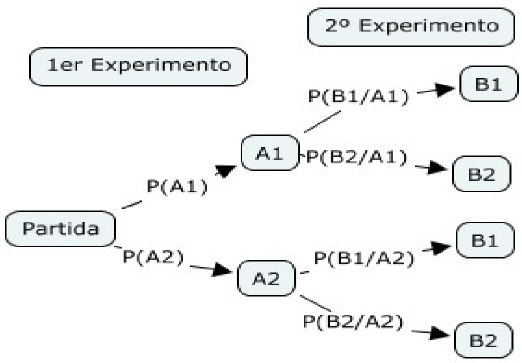
7. TEOREMA DE BAYES.

Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son sucesos incompatibles 2 a 2, y cuya unión es el espacio muestral $(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = E)$ y B es otro suceso, resulta que:

$$\boxed{P(A_i / B) = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + \cdots P(A_n) \cdot P(B/A_n)}}$$

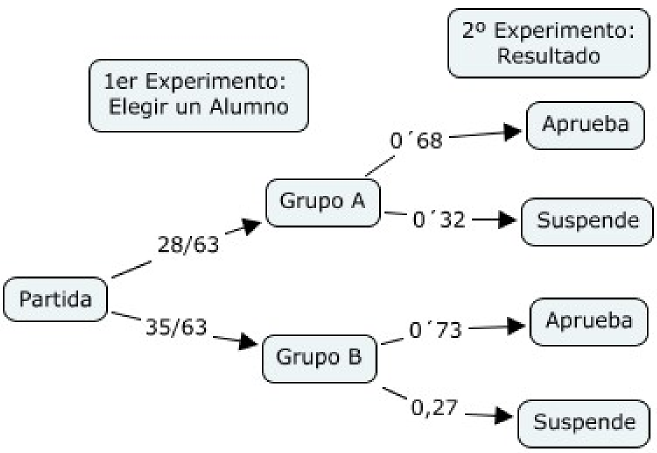
8. DIAGRAMA DE ÁRBOL

Se parte de la situación inicial y se realiza el primer experimento (ponemos en las ramos las probabilidades), después según el caso que se ha dado en el primer experimento se realiza el segundo (ramos probabilidades condicionadas)



Ejemplo: Dos clases de 2º de Bachillerato, una de 28 alumnos y otra de 35 alumnos hacen conjuntamente
un examen de Matemáticas. La probabilidad de aprobar de los alumnos de la primera clase es de 0'68
y los de la segunda del 0'73. Se toma un examen al azar y resulta que está aprobado. .Cuál es la probabilidad de que sea de un alumno de la 1ª clase?.

$$P(GrupoA/\,Aprueba) = \frac{\frac{28}{63} \cdot 0.68}{\frac{28}{63} \cdot 0.68 + \frac{35}{63} \cdot 0.73} = \frac{0.302}{0.708} = 0.42$$



(Este se puede hacer también por tabla de contingencia)

<u>EJEMPLOS:</u>

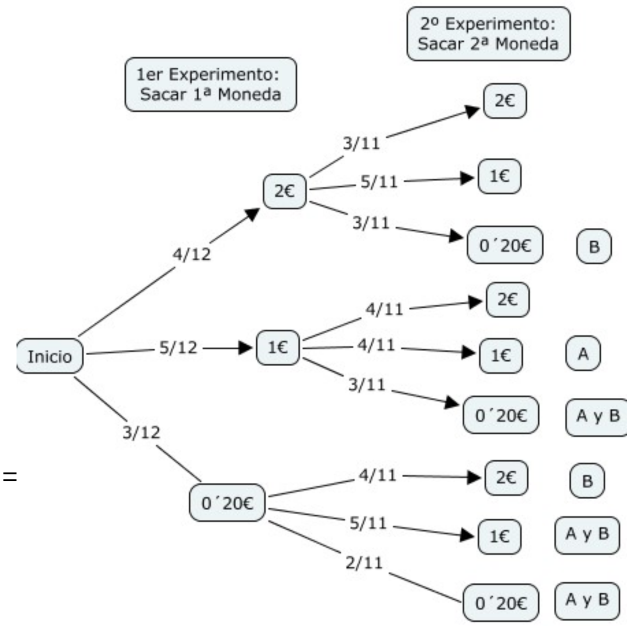
1. El partido A y el partido B concurren a unas elecciones en un municipio dónde el 55% de los votantes son mujeres. Se sabe que el 40% de los hombres votan al partido A y el 50% al partido B. El 60% de las mujeres votan al partido A y el 20% al B. El resto de electores no vota.
   a) Halla la probabilidad de que una persona, elegida al azar, no vote.
   b) Sabiendo que una persona, elegida al azar, ha votado al partido A, halle la probabilidad de que sea mujer.

VOTO / SEXO	A	B	No vota	Total
Hombre	40·45%=18%	50·45%=22´5%	45-18-22´5=4´5%	100-55=45%
Mujer	60·55%=33%	20·55%=11%	55-33-11=11%	55%
TOTAL	18+33=51%	22´5+11=33´5%	4´5+11=15´5%	100%

a) $P(No\ \ vota) = \frac{15'5}{100} = 0'155$ b) $P\left(\frac{Mujer}{A}\right) = \frac{33}{51} = 0'647$

Se puede hacer también por diagrama de árbol

2. De una bolsa que contiene 4 monedas de 2€, 5 de 1€ y 3 de 0.20€, se extraen dos monedas, al azar, sucesivamente y sin devolverlas a la bolsa.
   a) Calcula las probabilidades de los siguientes sucesos:
      A=”la suma de las dos monedas es inferior a 2.20€”
      B=”al menos una moneda es de 0.20€”
   b) Razone si los dos sucesos son independientes.



$$P(A) = \frac{5}{12}\cdot\frac{4}{11} + \frac{5}{12}\cdot\frac{3}{11} + \frac{3}{12}\cdot\frac{5}{11} + \frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11} = \frac{56}{132}$$

$$P(B) = \frac{4}{12}\cdot\frac{3}{11} + \frac{5}{12}\cdot\frac{3}{11} + \frac{3}{12}\cdot\frac{4}{11} + \frac{3}{12}\cdot\frac{5}{11} + \frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11} = \frac{60}{132}$$

$$P(A \cap B) = \frac{5}{12}\cdot\frac{3}{11} + \frac{3}{12}\cdot\frac{5}{11} + \frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11} = \frac{36}{132}$$

$¿P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B)?$ $¿\frac{36}{132} = \frac{56}{132}\cdot\frac{60}{132}?$ NO¡¡¡¡ → NO SON INDEPENDIENTES