12 Las distribuciones binomial y normal

CRITERIOS DE EVALUACIÓN / ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

A. Obtener la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta (v. a. d.).

1. Las probabilidades de obtener cada una de las caras de un dado cúbico no equilibrado vienen dadas en la siguiente tabla:

Cara	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	0,1	0,2	0,1	$2k$	0,15	k

Halla el valor de k.

B. Calcular los parámetros de una v. a. d., media o esperanza matemática, varianza y desviación típica.

2. En la siguiente tabla se muestra la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta, X:

x	1	2	3	4	5
$P(X = x)$	0,4	p	0,2	0,07	0,02

a) Calcula el valor de p.
b) Calcula el valor esperado de X.
c) Calcula la desviación típica de la variable aleatoria X.

C. Obtener, a partir de la función de densidad, la función de distribución de una variable aleatoria continua (v. a. c.), y viceversa.

3. Una variable aleatoria continua X tiene una distribución con función de densidad $f(x) = \begin{cases} k(1 - x^2) & \text{si} \quad -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$.

a) Calcula el valor de k.
b) Calcula la media y la varianza de la variable aleatoria X.

D. Calcular probabilidades de intervalos en una v. a. c. y determinar sus parámetros.

4. La función de densidad de cierta variable aleatoria continua viene dada por la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{4} & \text{si} \quad 0 < x \leqslant 1 \\ \dfrac{1}{4} & \text{si} \quad 1 < x \leqslant 4 \\ \dfrac{5 - x}{4} & \text{si} \quad 4 \leqslant x < 5 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

a) Dibuja la gráfica de dicha función y comprueba que, en efecto, se trata de una función de densidad.
b) Calcula $P(X < 2)$ y $P(4 < X < 5)$.
c) Calcula la media de dicha variable aleatoria.

E. Resolver problemas de v. a. d. que siguen una distribución $B(n, p)$.

5. Una academia de enseñanza de inglés evalúa a sus alumnos con una prueba de cuatro test. Cada test consta de diez preguntas con cuatro respuestas posibles, de las cuales solo una es válida. Si se contestaran todas las preguntas de todos los test al azar, calcula la probabilidad de que:
a) Se supere la evaluación, si han de aprobarse por separado al menos tres de los cuatro test.
b) No se supere la evaluación.
c) Se apruebe, al menos, uno de los test.

F. Resolver problemas de v. a. c. que siguen una distribución $N(\mu, \sigma)$.

6. La media de las precipitaciones anuales de una región es de 2000 ml/m^2, con una desviación típica de 300 ml/m^2. Calcula, suponiendo que la distribución es normal, la probabilidad de que en un año determinado la lluvia no supere los 1200 ml/m^2.

G. Determinar si una variable aleatoria discreta que siga una distribución $B(n, p)$ puede ajustarse mediante una normal.

H. Utilizar la distribución normal para calcular probabilidades surgidas en un caso binomial.

7. Un saco que contiene 400 monedas es vaciado sobre una mesa. Halla la probabilidad de que:
a) Aparezcan más de 210 caras.
b) El número de caras sea menor que 180.
c) El número de caras esté comprendido entre 190 y 210, ambos incluidos.

Soluciones

1. Dado que la suma de las probabilidades debe ser 1, se obtiene que:

$0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}1 + 0{,}15 + 3k = 1 \Rightarrow k = 0{,}15$

2. a) Dado que la suma de las probabilidades debe ser 1, se obtiene que:

$0{,}4 + p + 0{,}2 + 0{,}07 + 0{,}02 = 1 \Rightarrow p = 0{,}31$

b) $\mu = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i =$

$= 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}31 + 3 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}07 + 5 \cdot 0{,}02 = 2$

c) $\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - \mu^2} = \sqrt{5{,}06 - 4} = \sqrt{1{,}06} = 1{,}03$

3. a) La función de densidad $f(x)$ tiene que cumplir las siguientes propiedades:

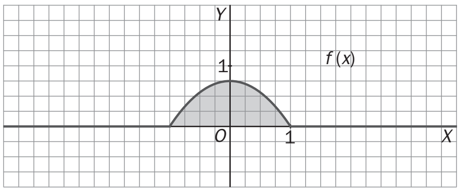
– $f(x) \geqslant 0 \ \forall x \in D(f)$

– El área encerrada por la curva y el eje X vale 1; es decir, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$.

Por tanto: $\int_{-1}^{1} k(1 - x^2)\,dx = \left[k\left(x - \frac{x^3}{3}\right)\right]_{-1}^{1} = \frac{4k}{3} = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow k = \frac{3}{4}$

La figura muestra la gráfica de la función de densidad $f(x)$.



b) La media se calcula:

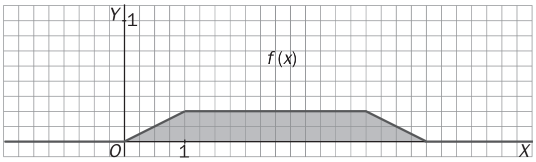
$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}(1 - x^2)x\,dx = \left[\frac{3}{4}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right)\right]_{-1}^{1} = 0$$

La varianza se calcula:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu)^2 f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{3}{4}(1 - x^2)x^2\,dx =$$

$$= \left[\frac{3}{4}\left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5}\right)\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{5} \Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

4. a) Para que $f(x)$ sea una función de densidad se necesita que $f(x) \geqslant 0 \ \forall x \in D(f)$, lo cual es cierto, y que el área encerrada por la curva y el eje X valga 1. Para calcular dicha área, la podemos descomponer en dos triángulos $\left(\text{de base 1 y altura } \frac{1}{4}\right)$ y un rectángulo $\left(\text{de base 3 y altura } \frac{1}{4}\right)$ cuya suma de áreas vale $S = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$.



b) $P(X < 2) = \int_{-\infty}^{2} f(x)\,dx = \int_{0}^{1} \frac{x}{4}\,dx + \int_{1}^{2} \frac{1}{4}\,dx =$

$= \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

$P(4 < X < 5) = \int_{4}^{5} f(x)\,dx = \int_{4}^{5} \frac{5 - x}{4}\,dx = \frac{1}{8}$

c) $\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx =$

$= \int_{0}^{1} \frac{x^2}{4}\,dx + \int_{1}^{4} \frac{x}{4}\,dx + \int_{4}^{5} \frac{5x - x^2}{4}\,dx = \frac{5}{2}$

5. Comenzamos por calcular cuál es la probabilidad de aprobar un test (contestar bien 5 o más preguntas). El número de respuestas bien contestadas en cualquiera de los cuatro test sigue una distribución binomial de parámetros $n = 10$, $p = \frac{1}{4}$: $B\left(10, \frac{1}{4}\right)$.

Por tanto:

$P(X \geqslant 5) = P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) +$
$+ P(X = 8) + P(X = 9) + P(X = 10) =$

$= \binom{10}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^5 + \binom{10}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^6\left(\frac{3}{4}\right)^4 + \cdots +$

$+ \binom{10}{10}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}\left(\frac{3}{4}\right)^0 = 0{,}081$

El número de test aprobados sigue una distribución binomial de parámetros $n = 4$, $p = 0{,}081$: $B(4;\, 0{,}081)$.

a) $P(X = 3) + P(X = 4) = 0{,}00195 + 0{,}00004 = 0{,}00199$

b) $1 - 0{,}00199 = 0{,}99801$

c) $1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}7133 = 0{,}2867$

6. $\mu = 2000 \text{ ml m}^{-2}$; $\sigma = 300 \text{ ml m}^{-2}$;

$P(X < 1200) = P\left(\frac{X - 2000}{300} < \frac{1200 - 2000}{300}\right) =$

$= P\left(Z < -\frac{8}{3}\right) = P\left(Z > \frac{8}{3}\right) = 1 - P\left(Z < \frac{8}{3}\right) =$

$= 1 - 0{,}9962 = 0{,}0038$

7. El número de caras, X, que aparecen en 400 tiradas sigue una distribución binomial de parámetros $n = 400$, $p = 0{,}5$: $B(400;\, 0{,}5)$.

Pero dado que $np = nq = 200 > 5$, esta binomial podemos sustituirla por una normal X', con la misma media:

$$\mu = np = 200$$

y la misma desviación típica:

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{100} = 10$$

Por tanto, será $N(200,\, 10)$.

a) $P(X > 210) = P(X' > 210{,}5) \Rightarrow$

$\Rightarrow P\left(\frac{X' - 200}{10} > \frac{10{,}5}{10}\right) = P(Z > 1{,}05) =$

$= 1 - P(Z < 1{,}05) = 1 - 0{,}8531 = 0{,}1469$

b) $P(X < 180) = P(X' < 179{,}5) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(Z < -2{,}05) = P(Z > 2{,}05) =$

$= 1 - P(Z < 2{,}05) = 1 - 0{,}9798 = 0{,}0202$

c) $P(190 \leqslant X \leqslant 210) = P(189{,}5 < X' < 210{,}5) \Rightarrow$

$\Rightarrow P(-1{,}05 < Z < 1{,}05) = 2P(Z < 1{,}05) - 1 = 0{,}7062$

13 El muestreo estadístico

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN

A. Obtener muestras aleatorias de una población, explicando la técnica utilizada.

1. Se ha encargado a cuatro personas que efectúen un sondeo de opinión sobre la intención de voto en las próximas elecciones. Cada una eligió la muestra de la siguiente forma:

A: 200 individuos, según iban pasando a las 12.00 por una calle céntrica.
B: 500 individuos, mediante llamadas teléfonicas a sus domicilios a las 10.00.
C: 250 individuos en los andenes del metro.
D: 50 individuos de cinco distritos distintos, 24 de los cuales eran hombres y con al menos 6 de los encuestados en cada grupo de edad de 20-30, 30-40, 40-50, 50-60, 60-70 y más de 70 años.

Argumenta las ventajas y los inconvenientes de cada uno de los muestreos.

B. Determinar la proporción de individuos de cada estrato en un muestreo estratificado.

2. En una empresa de 2500 empleados se quiere formar una comisión de 60 trabajadores para que represente de una manera equitativa todos los estratos del personal. Se efectúa una clasificación atendiendo a la siguiente tabla:

	En prácticas	Antigüedad < 10	Antigüedad > 10
Hombres	16	715	819
Mujeres	36	624	290

¿Cuántas mujeres deberá tener la comisión? ¿Cuántos hombres en prácticas? ¿Cuántos trabajadores de plantilla con más de 10 años de antigüedad? ¿Cuántos hombres de plantilla con menos de 10 años de antigüedad?

C. Efectuar un muestreo sistemático en una población.

3. En un centro escolar hay 480 estudiantes y se pretende tomar una muestra de 40 de ellos para que den su opinión sobre el funcionamiento de la biblioteca. La dirección del centro decide utilizar la técnica de muestreo aleatorio sistemático, para lo cual tiene una lista con los 480 alumnos ordenados por el número de matrícula. Sacan al azar uno de los 480 primeros números naturales y sale el 127. Escribe la relación de los números que constituirán la muestra buscada.

Si en el centro hay 180 alumnos de Bachillerato y 300 de ESO, ¿qué proporción de alumnos de Bachillerato debería haber en la muestra?

D. Calcular proporciones en forma de fracción, en forma decimal como tanto por uno y en porcentaje.

4. Para determinar la incidencia del tabaco en una población se han tomado cuatro muestras como indica la tabla adjunta.

Determina la proporción de fumadores en cada muestra y en el total de ecuestados.

Expresa esa proporción en fracción, en tanto por uno y en tanto por ciento.

	A	B	C	D
Fuman	12	10	4	15
No fuman	36	65	28	25

E. Calcular la probabilidad de que una proporción aparezca en una muestra de tamaño *n* entre dos valores determinados.

5. El 12% de las barras de pan que produce una tahona no dan el peso mínimo exigido. Se toma una muestra aleatoria de 80 barras:

a) ¿Cuál es la distribución que sigue la proporción de barras que no dan el peso debido de la muestra?
b) Halla la probabilidad de que haya más de 15 barras deficientes.

F. Conocidas la media y la desviación típica de una población, determinar la probabilidad de que la media de una muestra de tamaño *n* se encuentre entre dos valores determinados.

6. El peso medio de los melones de una plantación es de 3 kg, con una desviación típica de 400 g. Si tomamos muestras de tamaños 9, 25 y 64 melones, ¿cuál es la probabilidad de que el peso medio de la muestra, en cada caso, esté comprendido entre 3 y 3,2 kg?

G. Establecer la distribución que siguen las sumas muestrales cuando se conocen la media y la desviación típica poblacionales.

7. El peso de los coches de uso turístico sigue una distribución normal *N*(1100 kg, 150 kg). Por seguridad, un barco que admitiría hasta 62 000 kg de carga sólo admite 50 coches como máximo en cada viaje.

¿Cuál es la probabilidad de que un día determinado el peso de los 50 coches sobrepase el límite del peso máximo?

H. Determinar cómo se distribuye la diferencia de las medias muestrales en muestras de tamaño *n*.

8. La nota de Matemáticas en las PAU de los alumnos del distrito universitario *A* se distribuye normalmente con una media $\mu_1 = 5{,}8$ puntos y una desviación típica $\sigma_1 = 1{,}2$. En el distrito *B*, $\mu_2 = 6{,}1$ puntos con una $\sigma_2 = 1{,}1$. Si se toma una muestra de 80 alumnos del distrito *A* y 50 del *B*, ¿cuál es la probabilidad de que la diferencia de las medias de los alumnos de cada muestra sea superior a 0,3 puntos?

Soluciones

1. Aunque la muestra *D* es la de menor tamaño, es la más representativa de toda la población, ya que se ha preocupado de representar a distintos estratos de la misma.

La muestra *B* es la de mayor tamaño y parece que el sondeo telefónico es bastante aleatorio, ya que la mayoría de los hogares tienen una línea telefónica. Pero presenta el inconveniente de la hora en la que se efectúan las llamadas, pues la mayoría de la población está en el trabajo en ese momento.

El sondeo en los andenes del metro (muestra *C*) es bastante sesgado, porque hay un sector numeroso de la población que no utiliza ese medio de transporte.

La muestra *A* parece ser la menos aconsejable por la hora, la zona donde se realiza y el tamaño.

2. El número de empleados de la comisión se debe repartir proporcionalmente al número de empleados de cada estrato, redondeando los números decimales al entero más próximo.

Mujeres: 950 sobre 2500 $\Rightarrow \dfrac{950}{2500} = \dfrac{x}{60} \Rightarrow x \approx 23$

Hombres en prácticas: $\dfrac{16}{2500} = \dfrac{y}{60} \Rightarrow y \approx 0$

Trabajadores/as > 10: $\dfrac{1109}{2500} = \dfrac{z}{60} \Rightarrow z \approx 27$

Hombres < 10: $\dfrac{715}{2500} = \dfrac{w}{60} \Rightarrow w \approx 17$

3. Hallamos el coeficiente de elevación o salto:

$$k = \frac{N}{n} = \frac{480}{40} = 12$$

Es decir, a partir del número 127 y de 12 en 12. A saber: 127, 139, 151…, 475, 7, 19…, 115.

Calculamos la proporción de alumnos de Bachillerato:

$\dfrac{180}{480} = \dfrac{x}{100} \Rightarrow x = 37{,}5\,\%$ estudiantes de Bachillerato

4. Muestra *A*: $\dfrac{12}{12+36} = \dfrac{1}{4} = 0{,}25 \Rightarrow 25\%$

Muestra *B:* $\dfrac{10}{10+65} = \dfrac{2}{15} \cong 0{,}13 \Rightarrow 13{,}33\%$

Muestra *C:* $\dfrac{4}{4+28} = \dfrac{1}{8} = 0{,}125 \Rightarrow 12{,}5\%$

Muestra *D:* $\dfrac{15}{15+25} = \dfrac{3}{8} = 0{,}375 \Rightarrow 37{,}5\%$

Total: $\dfrac{41}{41+154} = \dfrac{41}{195} \cong 0{,}21 \Rightarrow 21{,}03\%$

5. a) La distribución en el muestreo de una proporción, cuando *n* es grande, sigue una ley normal

$$N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

En este caso, $p = 12\% = 0{,}12$, y el tamaño de la muestra, $n = 80$, se considera suficientemente grande. Por tanto, tenemos una $N(0{,}12;\ \ 0{,}036)$.

b) Las 15 barras de un total de 80 de la muestra representan una proporción $p = 0{,}1875$.

Por tanto,

$$P(\hat{p} > 0{,}1875) = P\left(Z > \frac{0{,}1875-0{,}12}{0{,}036}\right) = P(Z > 1{,}875) =$$
$$= 1 - P(Z \leqslant 1{,}875) = 1 - F(1{,}875) =$$
$$= 1 - 0{,}9696 = 0{,}0304$$

6. Las medias muestrales, cuando el tamaño de las muestras es grande o cuando se obtienen de una población que se distribuye normalmente, siguen una distribución normal $N\left(\mu, \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$.

En este caso, para cada muestra será:

$$N(3;\,0{,}133) \Rightarrow P(3 < \bar{X} < 3{,}2) = P\left(0 < Z < \frac{3{,}2-3}{0{,}133}\right) =$$
$$= P(0 < Z < 1{,}50) =$$
$$= F(1{,}50) - F(0) =$$
$$= 0{,}9332 - 0{,}5 = 0{,}4332$$

$$N(3;\ 0{,}08) \Rightarrow P(3 < \bar{X} < 3{,}2) = P\left(0 < Z < \frac{3{,}2-3}{0{,}08}\right) = 0{,}4938$$

$$N(3;\ 0{,}05) \Rightarrow P(3 < \bar{X} < 3{,}2) = P\left(0 < Z < \frac{3{,}2-3}{0{,}05}\right) = 0{,}5$$

7. La distribución de las sumas muestrales es una normal $N(n\mu,\, \sigma\sqrt{n})$. En este caso, $n\mu = 50 \cdot 1100 = 55\,000$ y $\sigma\sqrt{n} = 150\sqrt{50} = 1060{,}66$.

Por tanto,

$$P(T > 62\,000) = P\left(Z > \frac{62\,000 - 55\,000}{1060{,}66}\right) = P(Z > 6{,}6) = 0$$

8. La distribución en el muestreo de la diferencia de las medias sigue una normal $N\left(\mu_2 - \mu_1, \sqrt{\dfrac{\sigma_2^2}{n_2} + \dfrac{\sigma_1^2}{n_1}}\right)$.

En este caso:

$$N\left(6{,}1 - 5{,}8;\ \sqrt{\frac{1{,}1^2}{50} + \frac{1{,}2^2}{80}}\right) \Rightarrow N(0{,}3;\ 0{,}205)$$

Por tanto, $P(\bar{X}_2 - \bar{X}_1 > 0{,}3) = P\left(Z > \dfrac{0{,}3 - 0{,}3}{0{,}205}\right) = 0{,}5$

14 Intervalos de confianza

CRITERIOS DE EVALUACIÓN	ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN
A. Obtener los valores críticos $-z_{\frac{\alpha}{2}}$ y $z_{\frac{\alpha}{2}}$ mediante una tabla de la $N(0, 1)$ para cualquier nivel de significación α.	**1.** Encuentra en la tabla de la $N(0, 1)$ los valores de la variable Z que verifican las igualdades: a) $P(Z \leqslant z_1) = 0{,}8485$ b) $P(Z \leqslant z_2) = 0{,}1539$ c) $P(-z_3 \leqslant Z \leqslant z_3) = 0{,}34$ **2.** Halla los valores críticos $z_{\frac{\alpha}{2}}$ para los siguientes valores de confianza o significación. a) Nivel de confianza $1 - \alpha = 0{,}92$ b) Nivel de significación $\alpha = 0{,}04$
B. Hallar el intervalo de confianza para estimar la proporción poblacional p en una $B(n, p)$ a partir del estadístico $\hat{p}$ obtenido de una muestra de tamaño n con distintos niveles de confianza.	**3.** Tomada al azar una muestra de 60 alumnos de la universidad, se encontró que un tercio de ellos hablaban el idioma inglés. Halla, con un nivel de confianza del 90%, un intervalo para estimar la proporción de individuos que hablan el idioma inglés entre los alumnos de la universidad.
C. Determinar un intervalo de confianza para la media poblacional cuando se conoce la desviación típica de la población y una muestra con un nivel de significación determinado α.	**4.** La duración de las bombillas de una determinada marca se aproxima a una distribución normal con una desviación típica de 100 horas. Se toma una muestra aleatoria simple de 25 bombillas y se obtienen las siguientes duraciones (en horas): 1240, 1405, 1354, 990, 1006, 1145, 1204, 1008, 1034, 1105, 1033, 1154, 1126, 1037, 1130, 1090, 1216, 1182, 1113, 1092, 1075, 1120, 1192, 1275, 1204 Halla un intervalo de confianza al 95% para la duración media de esa marca de bombillas. **5.** Se quiere estimar el precio medio del café en los bares de una determinada localidad. Se desconoce tanto la media como la desviación típica del precio del café en el total de la población. Se toma una muestra en 25 establecimientos y se obtiene un precio medio de 1,40 € con una varianza de 0,04. Calcula la cuasivarianza de la muestra y un intervalo de confianza al 88% del precio medio del café en la población.
D. Obtener un intervalo de confianza para la diferencia de medias poblacionales.	**6.** La altura media de los hombres de un país se distribuye según una normal con desviación típica de 12 cm, y la de las mujeres, con desviación típica de 10 cm. Para estimar la diferencia de altura media de los hombres y las mujeres se elige una muestra al azar de 50 parejas (hombre-mujer). Las alturas medias muestrales son $\overline{x}_H = 176$ cm y $\overline{x}_M = 165$ cm. Halla el intervalo de confianza para la diferencia de alturas medias al nivel del 90%.
E. Calcular, para una muestra de tamaño n y un nivel de significación α, el error máximo admisible.	**7.** Al estimar el parámetro p de una binomial se tomó una muestra de tamaño $n = 25$ para determinar el intervalo de confianza al 90%. ¿Cuál será el error máximo admisible del intervalo obtenido si el parámetro p obtenido en la muestra fue de 0,65? ¿Cuál fue el intervalo de confianza?
F. Calcular, para una muestra de tamaño n y un error máximo admisible E, el nivel de significación α.	**8.** Mediante una muestra de tamaño $n = 16$ se ha calculado un intervalo de confianza para estimar la media poblacional del peso de una raza de perros. Sabiendo que la desviación típica del peso de los perros es $\sigma = 6$ kg y el intervalo de confianza obtenido ha sido (24,2; 30,6), calcula: a) El peso medio de los perros de la muestra. b) El nivel de confianza del intervalo obtenido.
G. Determinar el tamaño mínimo de la muestra para un error máximo admisible E y un nivel de significación α.	**9.** El 70% de los habitantes de un país están a favor de la bajada de impuestos. Si se toma una muestra aleatoria, ¿cuál deberá ser el tamaño mínimo de la misma para que, con un nivel de confianza del 95%, el error máximo admisible en la estimación sea del 6%? ¿Y si el nivel de confianza fuera del 90%? ¿Y si el nivel de confianza es del 90% y el error máximo admisible en la estimación es del 8%?

Soluciones

1. a) $P(Z \leqslant z_1) = 0{,}8485 \Rightarrow z_1 = 1{,}03$

b) $P(Z \leqslant z_2) = 0{,}1539 \Rightarrow P(Z > z_2) = 0{,}8461 \Rightarrow$

$\Rightarrow z_2 = -1{,}02$

c) $P(-z_3 \leqslant Z \leqslant z_3) = 0{,}34 \Rightarrow P(Z \leqslant z_3) = 0{,}5 + \dfrac{0{,}34}{2} = 0{,}67 \Rightarrow$

$\Rightarrow z_3 = 0{,}44; \quad -z_3 = -0{,}44$

2. a) Nivel de confianza $1 - \alpha = 0{,}92$:

$$1 - \alpha = 0{,}92 \Rightarrow P(Z \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0{,}96 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}75$$

b) Nivel de significación $\alpha = 0{,}04$:

$$\alpha = 0{,}04 \Rightarrow P(Z \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0{,}98 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}05$$

3. El intervalo de confianza para una proporción p es:

$$IC = \left(\hat{p} - z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}},\ \hat{p} + z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}\right)$$

En este caso, $n = 60$, $\hat{p} = \dfrac{1}{3}$ y $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645$

Por tanto,

$$IC = \left(\frac{1}{3} - 1{,}645\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{60}},\ \frac{1}{3} + 1{,}645\sqrt{\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}}{60}}\right)$$
$$= (0{,}233;\ 0{,}433)$$

4. Calculamos la media de la muestra y resulta ser:

$$\bar{x} = \frac{28\,530}{25} = 1141{,}2$$

El valor crítico para $1 - \alpha = 95\%$ es $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}96$.

Por tanto, el intervalo de confianza es:

$$IC = \left(1141{,}2 \pm 1{,}96\frac{100}{\sqrt{25}}\right) = (1180{,}4;\ 1102)$$

5. Hallamos la cuasivarianza:

$$\hat{s}^2 = s^2 \cdot \frac{N}{N-1} = 0{,}04 \cdot \frac{25}{24} = 0{,}0417 \Rightarrow \hat{s} = 0{,}204$$

Obtenemos el valor crítico para $1 - \alpha = 88\%$:

$$P(Z \leqslant z_{\frac{\alpha}{2}}) = 0{,}94 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}555$$

El intervalo de confianza en este caso es:

$$IC = \left(\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}\right) = \left(1{,}40 \pm 1{,}555 \cdot \frac{0{,}204}{\sqrt{25}}\right) = \left(1{,}34;\ 1{,}46\right)$$

6. El intervalo de confianza para la diferencia de medias poblacionales es $IC = \left(\bar{x}_1 - \bar{x}_2 \pm z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}\right)$.

El valor crítico para un nivel de confianza del 90% es $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645$.

Por tanto,

$$IC = \left(176 - 165 \pm 1{,}645\sqrt{\frac{12^2}{50} + \frac{10^2}{50}}\right) = (7{,}37;\ 14{,}63).$$

7. El error máximo admisible es $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$.

Como el valor crítico para un nivel de confianza del 90% es $z_{\frac{\alpha}{2}} = 1{,}645$ y, además, $\hat{p} = 0{,}65$ y $n = 25$, se obtiene

$$E = 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}65 \cdot 0{,}35}{25}} = 0{,}1569.$$

El intervalo de confianza es:

$$IC = (0{,}65 - 0{,}1569; 0{,}65 + 0{,}1569) = (0{,}493;\ 0{,}807)$$

8. a) El peso medio es $\bar{x} = \dfrac{24{,}2 + 30{,}6}{2} = 27{,}4$.

b) En este caso, el error máximo ha sido

$$E = 30{,}6 - 27{,}4 = 3{,}2.$$

Además, $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow 3{,}2 = z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \dfrac{6}{\sqrt{16}} \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}13$

Por tanto,

$P(Z \leqslant 2{,}13) = 0{,}9834 \Rightarrow \dfrac{\alpha}{2} = 1 - 0{,}9834 = 0{,}0166 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha = 0{,}0332 \Rightarrow 1 - \alpha = 0{,}9668 = 96{,}68\%$

9. El error máximo admisible en el intervalo de confianza para una proporción es $E = z_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\dfrac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$. De aquí despejamos el tamaño de la muestra: $n = \hat{p}(1-\hat{p})\left(\dfrac{z_{\frac{\alpha}{2}}}{E}\right)^2$

Los valores críticos para un nivel de confianza del 95% y del 90% son 1,96 y 1,645, respectivamente.

Sustituyendo los datos, se obtiene:

I) $n = 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot \left(\dfrac{1{,}96}{0{,}06}\right)^2 = 224{,}1 \Rightarrow$ el tamaño mínimo de la muestra es de 225.

II) $n = 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot \left(\dfrac{1{,}645}{0{,}06}\right)^2 = 157{,}8 \Rightarrow$ el tamaño mínimo de la muestra es de 158.

III) $n = 0{,}7 \cdot 0{,}3 \cdot \left(\dfrac{1{,}645}{0{,}08}\right)^2 = 88{,}79 \Rightarrow$ el tamaño mínimo de la muestra es de 89.

15 Contraste de hipótesis

CRITERIOS DE EVALUACIÓN | **ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN**

A. Escribir la hipótesis nula y la alternativa de un contraste de hipótesis.

1. El número de accidentes mortales en una ciudad es, en promedio, de 12 mensuales. Tras una campaña de señalización y adecentamiento de las vías urbanas se contabilizaron, en 6 meses sucesivos, 8, 11, 9, 7, 10 y 9 accidentes mortales. Los responsables del Ayuntamiento quieren saber si fue efectiva la campaña.

Diseña el contraste de hipótesis que hay que realizar para dar respuesta a la pregunta.

B. Efectuar un contraste para la proporción de una distribución normal tomando como estimador de contraste $\widehat{p}$ la proporción obtenida de la muestra.

2. Un vivero nos garantiza que, como máximo, el 5% de los árboles que plantan se secan. Se hizo una repoblación forestal con 400 árboles, de los cuales se secaron 32.

Con un nivel de significación del 1%, ¿se puede aceptar la afirmación del vivero?

¿Y con un nivel de significación del 5%?

C. Contrastar la media de una población normal cuando se conoce la desviación típica poblacional.

3. Antes de la puesta en marcha del carné por puntos, la velocidad en cierta carretera seguía una normal de media 85 km/h y desviación típica de 10 km/h. Pasados unos meses a partir de la introducción de dicha medida, sobre 40 vehículos observados a diferentes horas del día se obtuvo una media de 81 km/h.

Plantea un test para contrastar la hipótesis de que con dicha medida la situación sigue igual, frente a que, como parece, ha mejorado.

¿A qué conclusión se llega con un nivel de significación del 5%?

¿Y con un nivel del 1%?

D. Contrastar la media de una población normal cuando no se conoce la desviación típica poblacional.

4. Se está estudiando el efecto del estrés sobre la presión arterial. La hipótesis es que la presión sistólica media en varones jóvenes estresados es superior a 18 cm de Hg. Estudiando una muestra de 36 sujetos, se encuentra que tienen una media de 15,5 cm de Hg con una desviación típica de 3,5.

Determina si este resultado hará rechazar la hipótesis formulada o, por el contrario, se la seguirá aceptando con un nivel de significación del 2%.

5. En un programa de control de enfermedades crónicas, la hipertensión está incluida como la primera patología a controlar. Se somete al programa a 15 pacientes hipertensos y se les controla su presión sistólica antes y después de 6 meses de tratamiento. Los datos son los siguientes:

Inicio	180	200	160	170	180	190	190	180	190	160	170	190	200	210	220
Fin	140	170	160	140	130	150	140	150	190	170	120	160	170	160	150

¿Es efectivo el tratamiento?

E. Distinguir entre los errores de tipo I y de tipo II al efectuar un contraste.

6. Al efectuar un estudio sobre el número de pulsaciones, en reposo, de los jóvenes que habitualmente practican deporte, se ha llegado a la conclusión de que la media es inferior a 60 pulsaciones por minuto con una desviación típica de 7.

Para contrastar esta hipótesis se toma una muestra de 25 deportistas con los cuales se obtiene una media de 62 pulsaciones por minuto. ¿Hará rechazar este resultado la hipótesis planteada, con un nivel de confianza del 95%? ¿Qué tipo de error se cometería si se rechazara siendo cierta?

Si, por el contrario, la media de pulsaciones no es inferior a 60 y no se rechaza la hipótesis, ¿qué tipo de error se cometería?

Calcula la potencia del contraste si se plantea una hipótesis alternativa H_1: La media del número de pulsaciones es de 65.

F. Calcular la probabilidad de cometer un error de tipo I.

7. Para contrastar un dato publicado en una revista científica en la que se afirmaba que el peso medio de los bebés varones de 12 semanas de vida era de 6 kg, con una desviación típica de 295 g, se tomó una muestra de 25 bebés varones de 12 semanas de vida y se obtuvo un peso medio de 5900 gramos.

¿Cuál es la probabilidad de rechazar la hipótesis H_0: El peso medio supera los 6 kg?

Soluciones

1. En primer lugar planteamos una hipótesis.

Hipótesis nula H_0: La campaña no ha sido efectiva.

Hipótesis alternativa H_a: La campaña ha modificado significativamente el número de accidentes.

Fijamos un nivel de significación α o un grado de confianza $1 - \alpha$. Por ejemplo, $\alpha = 0,05$.

Se elige el estadístico del contraste cuya distribución en el muestreo es conocida.

Como la desviación típica de la población se desconoce, se considera $Z = \dfrac{\overline{x} - \mu_o}{\dfrac{\hat{s}}{\sqrt{n}}}$.

Se determina la región de aceptación para el nivel de significación dado:

$$1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow \alpha = 0,05 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,960$$

La región de aceptación es $(-1,96;\ 1,96)$.

Con la muestra obtenida se calcula un valor particular del estadístico del contraste y se efectúan los cálculos:

$$n = 6; \overline{x} = 9, \hat{s} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot s = \sqrt{\frac{6}{5}} \cdot 1,291 = 1,4142 \Rightarrow$$

$\Rightarrow Z = -5,196 \Rightarrow$ Como no está en la región de aceptación de la hipótesis nula, la rechazaríamos y aceptaríamos la alternativa.

2. H_0: Se seca menos del 5% de los árboles.

$$Z = \frac{\hat{p} - p_o}{\sqrt{\dfrac{p_o(1 - p_o)}{n}}}, \quad \alpha = 0,01 \Rightarrow z_\alpha = 2,33$$

Región de aceptación: $(-\infty;\ 2,33)$

$$\hat{p} = \frac{28}{400} = 0,07; \quad Z = \frac{0,07 - 0,05}{\sqrt{\dfrac{0,05 \cdot 0,95}{400}}} = 1,83 \in (-\infty;\ 2,33)$$

$\Rightarrow$ Con un nivel de significación del 1% se aceptaría la afirmación del vivero.

Para $\alpha = 0,05 \Rightarrow z_\alpha = 1,645$

Región de aceptación: $(-\infty;\ 1,645)$

$\Rightarrow$ Como $1,83 \notin (-\infty;\ 1,645)$, se rechazaría la hipótesis.

3. H_0: Todo sigue igual.

H_a: La situación ha mejorado.

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{81 - 85}{\dfrac{10}{\sqrt{40}}} = -2,53$$

Para $1 - \alpha = 0,95 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$

Región de aceptación: $(-1,96;\ 1,96)$

Como $-2,53 \notin (-1,96;\ 1,96) \Rightarrow$ se rechaza la hipótesis y se acepta que la situación ha mejorado.

Para $1 - \alpha = 0,99 \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2,575$

Región de aceptación: $(-2,575;\ 2,575)$

Como $-2,53 \in (-2,575;\ 2,575) \Rightarrow$ no se rechaza la hipótesis de que todo sigue igual.

4. H_0: La presión es superior a 18 cm de Hg.

$$\hat{s} = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot s = \sqrt{\frac{36}{35}} \cdot 3,5 = 3,55$$

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu_o}{\dfrac{\hat{s}}{\sqrt{n}}} = \frac{15,5 - 18}{\dfrac{3,55}{\sqrt{36}}} = -4,22$$

$1 - \alpha = 0,98 \Rightarrow z_\alpha = -2,55$

Región de aceptación: $(-2,55;\ +\infty)$

Como $-4,22 \notin (-2,55;\ +\infty) \Rightarrow$ se rechaza la hipótesis.

5. H_0: Las diferencias entre las tensiones arteriales no son significativas.

Fijamos un $\alpha = 5\%$, con lo cual la región de aceptación del estadístico es $(-1,96;\ 1,96)$.

$$\overline{x}_1 = 186; \hat{s}_1 = 17,23; \quad \overline{x}_2 = 153,3; \hat{s}_2 = 17,99$$

$$Z = \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\dfrac{\sigma_1^2}{n_1} + \dfrac{\sigma_2^2}{n_2}}} = \frac{186 - 153,3}{\sqrt{\dfrac{17,23^2}{15} + \dfrac{17,99^2}{15}}} = 5,08$$

Como $5,08 \notin (-1,96;\ 1,96) \Rightarrow$ se rechaza la hipótesis $\Rightarrow$ se acepta que las diferencias entre las tensiones son significativas y que, por tanto, el tratamiento es efectivo.

6. El intervalo de aceptación para $1 - \alpha = 0,95$ es $(+\infty;\ 1,645)$.

El estadístico es:

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu_o}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{62 - 60}{\dfrac{7}{\sqrt{25}}} = 1,43 \in (-\infty; 1,645)$$

No podemos rechazarla. Si la rechazáramos siendo cierta estaríamos cometiendo un error de tipo I.

En el caso de que el número de pulsaciones fuera superior a 60 y no rechazáramos la hipótesis, cometeríamos un error de tipo II.

Se aceptaría la hipótesis si

$$\frac{\overline{x} - 60}{\dfrac{7}{\sqrt{25}}} \leqslant 1,645 \Rightarrow \overline{x} \leqslant 62,303$$

¿Qué probabilidad hay de encontrar $\bar{x} \leqslant 62,303$ si $\mu = 65$? En esta hipótesis, lo que se distribuye como una $N(0,\ 1)$ es el estadístico

$$Z = \frac{\overline{x} - 65}{\dfrac{7}{\sqrt{25}}} \Rightarrow Z = \frac{62,303 - 65}{1,4} = -1,9264 \Rightarrow \beta = 0,027$$

La potencia del contraste sería de 0,973.

7. El valor del estadístico es $Z = \dfrac{5,9 - 6}{\dfrac{0,295}{\sqrt{25}}} = -1,69$.

Rechazaríamos la hipótesis si el intervalo de aceptación fuera $(-1,69;\ 1,69)$, el cual se obtiene para un nivel de significación $\alpha = \dfrac{1 - 09545}{2} = 0,02275$, que es la probabilidad de rechazar la hipótesis siendo cierta.

Prueba final A

Nombre: **Apellidos:**

Curso: **Grupo:** **Fecha:**

1. Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Halla una matriz B tal que $A^{-1}B = A$

b) Discute, según los valores de m, el sistema $A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} mx \\ 2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

2. Dado el sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} x + my + z = 2 \\ mx + 2z = 4 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

a) Halla los valores de m para los que sea compatible.

b) Resuélvelo, si es posible, para $m = 2$.

3. Una empresa constructora de barcos fabrica en sus dos astilleros tres tipos de barcos: A, B y C. Se compromete a entregar anualmente a cierta compañía marítima 6 barcos del tipo A, 8 del tipo B y 7 del tipo C. El primer astillero construye mensualmente un barco del tipo A, dos del tipo B y uno del tipo C, siendo el coste mensual de su funcionamiento de 5 millones de euros. El segundo construye mensualmente un barco del tipo A, uno del tipo B y dos del tipo C, siendo el coste mensual de su funcionamiento de 3 millones de euros. ¿Cuántos meses al año deberá trabajar cada astillero para que la empresa cumpla con el compromiso adquirido y consigan reducir al mínimo el coste de funcionamiento?

4. Sea la función $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si} \quad x \leqslant 2 \\ 3x + a & \text{si} \quad 2 < x < 5 \\ -x^2 + 13x + b & \text{si} \quad 5 \leqslant x \end{cases}$

a) Determina los valores de a y b para que la función sea continua en toda la recta real.

b) Estudia la derivabilidad de esta función para los valores de a y b calculados anteriormente.

c) Representa dicha función y calcula el área encerrada entre ella y el eje X desde $x = 0$ hasta $x = 7$.

5. Sea la función $f(x) = 2x^3 + bx^2 + ax - 5$.

a) Halla los valores de a y b de forma que f tenga un máximo en $x = 1$ y un mínimo en $x = 2$.

b) Halla el área de la región limitada por la gráfica de $f(x)$ y el eje X entre $x = 0$ y $x = 3$.

6. 500 bolas de cojinete tienen un peso medio de 5,02 g y una desviación típica de 0,30 g. Halla la probabilidad de que una muestra al azar de 100 bolas de ese conjunto tenga un peso total de entre 496 y 500 g.

7. Al medir el tiempo de reacción, un psicólogo estima que la desviación típica es de 0,05 segundos. ¿De qué tamaño ha de tomarse una muestra de medidas para tener una confianza del 95% de que el error de la estimación no supera 0,01 segundos? ¿Y para tener una confianza del 99%?

Soluciones

1. a) $A^{-1}B = A \Leftrightarrow AA^{-1}B = A^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow B = A^2 = \begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7&12\\4&7\end{pmatrix}$$

b) $A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}mx\\2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}2&3\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}mx\\2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(2+m)x+3y=1\\3x+2y=2\end{cases}$$

$$\begin{vmatrix}2+m&3\\3&2\end{vmatrix} = 2m-5;\ \begin{vmatrix}3&1\\2&2\end{vmatrix} = 4 \neq 0$$

Por tanto, si $m \neq \frac{5}{2}$, el sistema es S.C.D., y si $m = \frac{5}{2}$, el sistema es S.I.

2. a) $\left(\begin{array}{ccc|c}1&m&1&2\\m&0&2&4\\1&1&1&2\end{array}\right) \Rightarrow \begin{vmatrix}1&m&1\\m&0&2\\1&1&1\end{vmatrix} = -m^2+3m-2 \Rightarrow$

$\Rightarrow -m^2+3m-2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1, m \neq 2$

$m \neq 1$ y $m \neq 2$: rg(A) = rg(A') = 3 = n.º incóg. $\Rightarrow$ S.C.D.

$m = 1$: $\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&2\\1&0&2&4\\1&1&1&2\end{array}\right)$; $\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix} = -1 \neq 0$; $\begin{vmatrix}1&1&2\\1&0&4\\1&1&2\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ rg(A) = rg(A') = $2 < 3$ = n.º incóg $\Rightarrow$ S. C. I.

$m = 2$: $\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&1&2\\2&0&2&4\\1&1&1&2\end{array}\right)$; $\begin{vmatrix}1&2\\2&0\end{vmatrix} = -4 \neq 0$; $\begin{vmatrix}1&2&2\\2&0&4\\1&1&2\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ rg(A) = rg(A') = $2 < 3$ = nº incógnitas $\Rightarrow$ S. C. I.

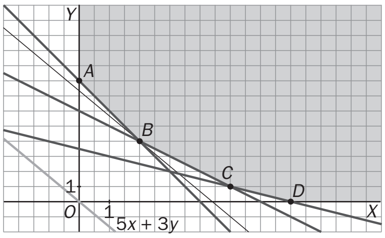
b) $\begin{cases}x+2y+z=2\\2x+2z=4\\x+y+z=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1-\dfrac{x+z}{2}\\x=2-z\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=0\\x=2-\lambda\\z=\lambda\end{cases}$

Solución: $(x, y, z) = (2-\lambda, 0, \lambda)$

3. Llamando x al número de meses que trabaja el astillero A e y al que trabaja el B, la función objetivo, que debemos minimizar, es el gasto de funcionamiento: $O(x, y) = 5x + 3y$.

Las restricciones son: $\begin{cases}R_1 \equiv x+y \geqslant 6\\R_2 \equiv 2x+y \geqslant 8\\R_3 \equiv x+2y \geqslant 7\\R_4 \equiv x \geqslant 0;\quad y \geqslant 0\end{cases}$

La región factible queda de la forma:

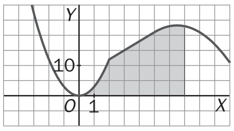


Los vértices son: $A = Y \cap R_2 = (0, 8)$; $B = R_1 \cap R_2 = (2, 4)$; $C = R_1 \cap R_3 = (5, 1)$; $D = R_3 \cap X = (7, 0)$.

Los valores de la función objetivo en los vértices (en millones de euros) son: $O(0, 8) = 24$, $O(2, 4) = 22$, $O(5, 1) = 28$, $O(7, 0) = 35 \Rightarrow$ Deberán trabajar 2 meses en el primer astillero y 4 en el segundo para que el gasto sea mínimo; este gasto ascenderá a 22 millones de euros.

El vértice que minimiza la función objetivo es $B = (2, 4)$.

4. a) La función es continua en $(-\infty, 2) \cup (2, 5) \cup (5, +\infty)$, por ser polinómica. Para que sea continua en 2 y en 5 necesitamos que



$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \Rightarrow 12 = 6 + a \Rightarrow a = 6$ y que

$\lim\limits_{x\to 5^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 5^+} f(x) \Rightarrow 21 = 40 + b \Rightarrow b = -19$

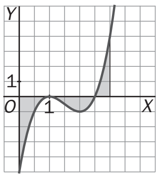
b) Para que sea derivable, debe ser continua. La derivada es: $f'(x) = \begin{cases}6x & \text{si} \quad x < 2\\3 & \text{si} \quad 2 < x < 5\\-2x+13 & \text{si} \quad 5 \leqslant x\end{cases}$

En $x = 2$ no es derivable, ya que $f'(2^-) = 12 \neq f'(2^+) = 3$. En $x = 5$ sí es derivable, pues en ese punto coinciden las dos derivadas laterales.

c) $S = \int_0^2 3x^2\,dx + \int_2^5 (3x+6)\,dx + \int_5^7 (-x^2+13x-19)\,dx =$

$= 8 + \frac{99}{2} + \frac{136}{3} = \frac{617}{6}$ u^2

5. a) Los puntos $x = 1$ y $x = 2$ son singulares, por lo que anularán la primera derivada.



$f'(x) = 6x^2 + 2bx + a$

$\begin{cases}f'(1) = 0\\f'(2) = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6+2b+a=0\\24+4b+a=0\end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases}a+2b=-6\\a+4b=-24\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a=12\\b=-9\end{cases}$

$f''(x) = 12x - 18 \Rightarrow f''(1) = -6 < 0 \Rightarrow M(1, 0)$

$f''(2) = 6 > 0 \Rightarrow m = (2, -1)$

b) $S = -\int_0^{\frac{5}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{5}{2}}^3 f(x)\,dx = -\left(-\frac{75}{32}\right) + \frac{27}{32} = \frac{51}{16}$ u^2

6. La distribución de las sumas muestrales es una normal $N\left(n\mu, \sigma\sqrt{n}\right)$, donde $n\mu = 100 \cdot 5{,}02 = 502$ y $\sigma\sqrt{n} = 0{,}30\sqrt{100} = 3$. Entonces:

$P(496 < S < 500) = P\left(\frac{496-502}{3} < Z < \frac{500-502}{3}\right) =$

$= P(-2 < Z < -0{,}67) = F(2) - F(0{,}67) =$

$= 0{,}9772 - 0{,}7486 = 0{,}2286$

7. El intervalo de confianza para la media poblacional es $\left(\bar{x} \pm z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, donde el error máximo admisible es $E = z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$. Si despejamos el tamaño de la muestra, obtenemos $n = \left(z_{\frac{\alpha}{2}} \frac{\sigma}{E}\right)^2 = \left(1{,}96 \cdot \frac{0{,}05}{0{,}01}\right)^2 = 96{,}04$. El tamaño mínimo de la muestra es de 97 individuos.

Para $1 - \alpha = 99\% \Rightarrow z_{\frac{\alpha}{2}} = 2{,}575 \Rightarrow$

$\Rightarrow n = \left(2{,}575 \cdot \frac{0{,}05}{0{,}01}\right)^2 = 165{,}77 \Rightarrow$ El tamaño mínimo de la muestra ha de ser de 166 individuos.

Prueba final B

Nombre: **Apellidos:**

Curso: **Grupo:** **Fecha:**

1. Dadas las matrices: $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

a) Encuentra las relaciones que deben cumplir a, b y c para que se verifique: $AB = BA$.

b) Para $a = b = c = 1$, calcula B^{10}.

2. Discute el sistema $\begin{cases} (m + 2)x + (m - 1)y - z = 3 \\ mx - y + z = 2 \\ x + my - z = 1 \end{cases}$ y resuélvelo para $m = 1$.

3. Una tienda de deportes quiere liquidar unas prendas deportivas de la temporada anterior y decide hacer lotes de dos tipos. El lote de tipo *A* consiste en una bolsa de deportes que contiene tres camisetas y un pantalón de chándal, y se venderá al precio de 16 €. El lote de tipo *B*, en bolsa de plástico, contiene una camiseta y un pantalón de chándal, y se venderá al precio de 10 €.

Si en total tiene 12 camisetas, 8 pantalones de chándal y 3 bolsas de deportes, determina el número de lotes que debe hacer de cada tipo para obtener una ganancia máxima, y el total de esa ganancia.

4. a) Estudia el dominio, la continuidad, los puntos de corte con los ejes, las simetrías, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, los máximos y mínimos locales, la curvatura, los puntos de inflexión y las asíntotas de la siguiente función: $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 2x}$

b) Teniendo en cuenta lo anterior, representa gráficamente dicha función.

c) Calcula el área encerrada por la gráfica de dicha función, el eje *X* y las rectas $x = 1$ y $x = 3$.

5. Un sondeo de 100 votantes elegidos al azar en un distrito indica que el 55% de ellos estaban a favor de cierto candidato. Halla los intervalos de confianza al 95% y al 99,72% para la proporción de todos los votantes favorables a ese candidato.

6. Para contrastar la hipótesis de que una moneda es buena adoptamos la siguiente regla de decisión: aceptarla si el número de caras en una sola muestra de 100 lanzamientos está entre 40 y 60 inclusive; rechazarla en caso contrario.

a) Halla la probabilidad de cometer un error de tipo I.

b) Representa gráficamente la regla de decisión y la zona correspondiente al error de tipo I hallado en el apartado anterior.

Soluciones

1. a) $AB=\begin{pmatrix} 5a+2c & 5b+2c & 0 \\ 2a+5c & 2b+5c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};BA=\begin{pmatrix} 5a+2b & 2a+5b & 0 \\ 7c & 7c & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 5a+2c=5a+2b \\ 5b+2c=2a+5b \\ 2a+5c=7c \\ 2b+5c=7c \end{cases} \Rightarrow a=b=c \Rightarrow B=\begin{pmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B^2=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B^3=\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \ldots\Rightarrow$

$$\Rightarrow B^n=\begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{10}=\begin{pmatrix} 512 & 512 & 0 \\ 512 & 512 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $\left(\begin{array}{ccc|c} m+2 & m-1 & -1 & 3 \\ m & -1 & 1 & 2 \\ 1 & m & -1 & 1 \end{array}\right); \quad \begin{vmatrix} m+2 & m-1 & -1 \\ m & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix}=-m^2-m;$

$-m^2-m=0 \Leftrightarrow m=0;\ m=-1$

$m \neq 0$ y $m \neq -1$: $\text{rg}(A) = \text{rg}(A') = 3 =$ n.º incóg $\Rightarrow$ S.C.D.

$m=0: \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right); \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0; \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$

$\Rightarrow \text{rg}(A)\neq\text{rg}(A')\Rightarrow$ S.I.

$m=0: \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right); \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0; \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$

$\Rightarrow \text{rg}(A)\neq\text{rg}(A')\Rightarrow$ S.I.

$m=-1: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right); \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}=-3\neq 0;$

$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=1\neq 0\Rightarrow \text{rg}(A)\neq\text{rg}(A')\Rightarrow$ S.I.

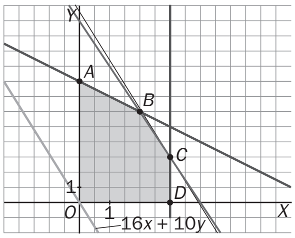
$m=1: \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right); \begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\neq 0\Rightarrow$ S.C.D.

Solución: $(x,\ y,\ z) = \left(\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2}\right)$

3. Llamando x al número de lotes del tipo A e y al del tipo B, la función objetivo, que debemos maximizar, es el importe total de la venta de todos los lotes: $O(x,\ y) = 16x + 10y$

Las restricciones y la región factible son:

$$\begin{cases} R_1 \equiv 3x + y \leqslant 12 \\ R_2 \equiv x + y \leqslant 8 \\ R_3 \equiv x \leqslant 3 \\ R_4 \equiv x \geqslant 0; \quad y \geqslant 0 \end{cases}$$



Los vértices son $A = Y \cap R_2 = (0, 8)$, $B = R_1 \cap R_2 = (2, 6)$, $C = R_1 \cap R_3 = (3, 3)$, $D = R_3 \cap X = (3, 0)$.

Los valores de la función objetivo en los vértices (en euros) son: $O(0, 8) = 80$, $O(2, 6) = 92$, $O(3, 3) = 78$, $O(3, 0) = 48 \Rightarrow$ Deberán hacer 2 lotes del tipo A y 6 del tipo B, con cuya venta obtendrían 92 €.

El vértice que maximiza la función objetivo es $B = (2, 6)$.

4. a) $D(f) = \text{R} - \{-2, 0\}$

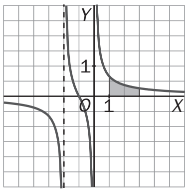
f es continua en $\text{R} - \{-2, 0\}$ por ser cociente de polinomios y anularse el denominador en esos puntos. En ambos puntos tiene una discontinuidad esencial asintótica, y las rectas $x = -2$ y $x = 0$ son asíntotas verticales.

$\lim_{x\to -2^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to -2^+} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$

La gráfica corta al eje X en $(-1, 0)$.

No es par ni impar.



$$f'(x) = -\frac{x^2 + 2x + 2}{x^2(x + 2)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2(x + 1)(x^2 + 2x + 2)}{x^3(x + 2)^3}$$

$f'(x) < 0$, $\forall x \Rightarrow f(x)$ no tiene puntos singulares y es siempre decreciente.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1 \Rightarrow$ Hay un punto de inflexión en $(-1, 0)$.

La función es cóncava hacia abajo en $(-\infty, -2) \cup (-1, 0)$ y cóncava hacia arriba en $(-2, -1) \cup (0, +\infty)$.

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0 \Rightarrow$ La función tiene como asíntota horizontal al eje X.

c) $S=\int_1^3 \frac{x+1}{x^2+2x}dx=\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+2x)\right]_1^3=\frac{1}{2}\ln(5)\ \text{u}^2$

5. $n = 100;\ \widehat{p} = 0{,}55$

Para $1 - \alpha = 0{,}95$, $z_{\alpha/2} = 1{,}96$, y el intervalo de confianza para una proporción p es:

$$IC=\left(0{,}55-1{,}96\sqrt{\frac{0{,}55\cdot 0{,}45}{100}};\ 0{,}55+1{,}96\sqrt{\frac{0{,}55\cdot 0{,}45}{100}}\right)=$$

$$=(0{,}4525;\ 0{,}6475)\Rightarrow(45{,}25\%;\ 64{,}75\%)$$

Para $1 - \alpha = 0{,}9973$, $z_{\alpha/2} = 2{,}98$, y resulta

$$IC=\left(0{,}55-2{,}98\sqrt{\frac{0{,}55\cdot 0{,}45}{100}};\ 0{,}55+2{,}98\sqrt{\frac{0{,}55\cdot 0{,}45}{100}}\right)=$$

$$=(0{,}4017;\ 0{,}6983)\Rightarrow(40{,}17\%;\ 69{,}83\%)$$

6. a) La probabilidad de obtener entre 40 y 60 caras en una moneda equilibrada se calcula mediante una distribución $B(n, p)$, pero se aproxima por la normal $N\left(np, \sqrt{np(1-p)}\right)$, con $np = 100 \cdot 0{,}5 = 50$ y $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{25} = 5$.

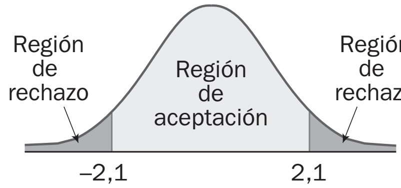
$$P\left[40 \leqslant X_B \leqslant 60\right] \cong P\left[39{,}5 \leqslant X_N \leqslant 60{,}5\right] =$$

$$= P\left[\frac{39{,}5 - 50}{5} \leqslant Z \leqslant \frac{60{,}5 - 50}{5}\right] = F(2{,}1) - F(-2{,}1) =$$

$$= 0{,}9821 - (1 - 0{,}9821) = 0{,}9642$$

La probabilidad de cometer un error de tipo I es la de rechazar la hipótesis siendo esta cierta, es decir, $1 - 0{,}9642 = 0{,}0358 \Rightarrow 3{,}58\%$.

b)



Notas:

Notas:

Notas:

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

……

Notas:

PROYECTO EDITORIAL
Equipo de Educación Secundaria de Ediciones SM

AUTORES
Manuel Bellón
Sotero Calvo
Ángel Díez
Juan Jesús Donaire

EDICIÓN
Inmaculada Luque
Rafaela Arévalo

ILUSTRACIÓN
Modesto Arregui

DISEÑO
Maritxu Eizaguirre
Alfonso Ruano

MAQUETACIÓN
Grafilia, SL

COORDINACIÓN EDITORIAL
Josefina Arévalo
Nuria Corredera

DIRECCIÓN EDITORIAL
Aída Moya