TEMA Nº 2: SISTEMAS DE ECUACIONES.

1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.
2. DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.
3. SISTEMAS ESCALONADOS. TRANSFORMACIÓN EN SISTEMAS ESCALONADOS
4. MÉTODO DE GAUSS
5. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUSCIONES MEDIANTES DETERMINANTES.

1. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

A. CONCEPTOS.

Ecuación lineal: Ecuación polinómica de grado uno con una o varias incógnitas.
Una solución es un conjunto de valores (uno para cada incógnita) que verifican la igualdad.
Ecuaciones equivalentes: Dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen las mismas soluciones: Para obtener ecuaciones equivalentes podemos sumar y restar expresiones, y multiplicar o dividir por números.
Sistemas de dos ecuaciones lineales: Conjunto de ecuaciones lineales. La solución debe cumplir todas las ecuaciones.
Sistemas equivalentes: Son aquellos que tiene las mismas soluciones.
Obtención de sistemas equivalentes:

- Multiplicar o dividir los dos miembros de las ecuaciones por número distintos de 0.
- Añadir una ecuación que sea combinación lineal de las otras.
- Sustituir una ecuación por otra que sea combinación lineal de las ecuaciones (esa ecuación debe intervenir). (ejemplo: Sustituir la **2ª** ecuación por la c.l. 3·1ª+3·**2ª**-3ª)

2. DISCUSIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

Cuando hablamos de **Discusión** de S.E.L. queremos clasificar los sistemas dependiendo del número de soluciones.

Número de soluciones	Nombre
Una solución	Sistema Compatible Determinado (S.C.D.)
Infinitas soluciones	Sistema Compatible Indeterminado (S.C.I.)
Sin solución	Sistema Incompatible (S.I.)

3. SISTEMAS ESCALONADOS. TRANSFORMACIÓN EN SISTEMAS ESCALONADOS.

Un sistema se dice que es escalonado si al observar el sistema vemos que se van perdiendo incógnitas en cada ecuación. Ejemplos:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+2z=7 \\ 5y-z=6 \\ 3z=12 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+2y\qquad -t=5 \\ y+z\qquad =8 \\ z+3t=11 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} 3x-5y\qquad =11 \\ 2y\qquad =4 \\ x+y+z=14 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ y-z=1 \\ 0=3 \end{array}\right\}$$

Resolución de sistemas escalonados: Cogemos la ecuación con menos incógnitas y despejamos. Así con todas.

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+2z=7 \\ 5y-z=6 \\ 3z=12 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Despejamos la } 3^a \Rightarrow 3z=12 \Rightarrow z=12/3 \Rightarrow z=4 \\ \text{En la } 2^a \text{ sustituimos z por 4 y despejamos y} \Rightarrow 5y-4=6 \Rightarrow 5y=6+4 \Rightarrow y=10/5 \Rightarrow y=2 \\ \text{En la } 1^a \text{ sustituimos z por 4 e y por 3 y hallamos x} \Rightarrow x-3\cdot 2+2\cdot 4=7 \Rightarrow x-6+8=7 \Rightarrow x=5 \end{array}$$

Solución $x=5$; $y=2$;$z=4$ → S.C.D.

$$\left.\begin{array}{r} x+2y\qquad -t=5 \\ y+z\qquad =8 \\ z+3t=11 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{En la } 3^a \text{ despejamos z} \Rightarrow z=11-3t \text{ (llamamos } t=\lambda) \;\; z=11-3\lambda \\ \text{En la } 2^a \text{ despejamos y} \Rightarrow y=8-z \text{ (como } z=11-3\lambda) \;\; y=8-(11-3\lambda) \Rightarrow y=-3+3\lambda \\ \text{En la } 1^a \text{ despejamos x} \Rightarrow x=5-2y+t \Rightarrow x=5-2(-3+3\lambda)+\lambda \Rightarrow x=11-5\lambda \end{array}$$

Solución $x=11-5\lambda;\ y=-3+3\lambda;\ z=11-3\lambda;\ t=\lambda \rightarrow$ S.C.I.

$$\left.\begin{array}{r} 3x-5y \quad =11 \\ 2y \quad =4 \\ x+y+z=14 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{En la 2ª despejamos y} \Rightarrow y=\frac{4}{2} \Rightarrow y=2 \\ \text{En la primera obtenemos x} \Rightarrow 3x-5\cdot 2=11 \Leftarrow 3x-10=11 \Rightarrow 3x=21 \Rightarrow x=7 \\ \text{En la 3ª obtenemos z} \Rightarrow 7+2+z=14 \Rightarrow z=14-7-2 \Rightarrow z=5 \end{array} \quad \boxed{\begin{array}{l} \textit{Solución} \\ x=7 \\ y=2 \\ z=5 \end{array}} \text{ SCD}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=2 \\ y-z=1 \\ 0=3 \end{array}\right\} \text{ De la 3ª ecuación obteneos 0=3 ¡¡Imposible¡¡} \rightarrow \text{Sistema sin Solución S.I.}$$

<u>Transformación en sistemas escalonados</u>: Debemos hacer operaciones con las ecuaciones (sustituir una ecuación por otra es combinación lineal de ella y alguna más del sistema) para ir eliminando incógnitas en cada ecuación. <u>Ejemplos</u>:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y=4 \\ 3x-7y=7 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a-3\cdot 1^a \end{array} \xrightarrow[\substack{3x-7y=7 \\ -3x+9y=-12}]{} \left.\begin{array}{r} x-3y=4 \\ 2y=-5 \end{array}\right\} \text{Resolvemos: } y=-\frac{5}{2} \rightarrow x-3\left(-\frac{5}{2}\right)=4; x=4-\frac{15}{2}; x=-\frac{7}{2}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+5y-3z=7 \\ 2x-y+\quad z=11 \\ 4x+3y-4z=3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a-2\cdot 1^a \rightarrow \\ 3^a-4\cdot 1^a \rightarrow \end{array} \begin{array}{r} 2x-y+\quad z=11 \\ -2x-10y+6z=-14 \\ \hline 4x+3y-4z=3 \\ -4x-20y+12z=-28 \end{array} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x+5y-3z=7 \\ -11y+7z=-3 \\ -17y+8z=-25 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 1^a \\ 2^a \\ 11\cdot 3^a-17\cdot 2^a \end{array} \begin{array}{r} \rightarrow \\ -187y+88z=-275 \\ 187y-119z=51 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} x+5y-3z=7 \\ -11y+7z=-3 \\ -31z=-224 \end{array}\right\} \quad \text{Ahora se resolvería}$$

Muchas veces conviene cambiar las incógnitas de lugar o las ecuaciones de sitio para que las operaciones sean más sencillas.

4. MÉTODO DE GAUSS

El método anterior se conoce por el método de Gauss. Pero puede abreviarse si nos olvidamos de las incógnitas y nos limitamos a trabajar con números. Tenemos que hacer ceros por debajo del primer elemento de la 1ª fila, una vez hecho debemos hacer ceros por debajo del segundo elemento de la segunda fila, y así sucesivamente. Ejemplo 1:

$$\left.\begin{array}{r} 2x-5y+3z=4 \\ x-2y+z=3 \\ 5x+y+7z=11 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 2 & -5 & 3 & 4 \\ \langle 1 \rangle & -2 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{c} \text{cogemos el} \\ \text{1 como elemento} \\ \text{para operar} \\ \text{cambiamos filas 1 y 2} \end{array} \begin{array}{|l} \\ 2^a \\ 1^a \\ 3^a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 7 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 1^a \\ 2^a-2\cdot 1^a \\ 3^a-5\cdot 1^a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2-2 & -5-(-4) & 3-2 & 4-6 \\ 5-5 & 1-(-10) & 7-5 & 11-15 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ 1^a \\ 2^a \\ 3^a+11\cdot 2^a \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 11+(-11) & 2+11 & -4+(-22) \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} x & y & z & \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 13 & -26 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l|l} 3^a & 13z=-26; \rightarrow z=-2 \\ 2^a & -y-2=-2 \rightarrow y=0 \\ 1^a & x-0-2=3 \rightarrow x=5 \end{array}$$

Si tenemos dos filas iguales las podemos quitar. Si tenemos una fila de ceros la podemos quitar.
El objetivo es hacer 0 por debajo de la diagonal.
Después de todo el proceso de hacer ceros podemos llegar a tres situaciones diferentes:

I. $\left(\begin{array}{cccc\|c} \therefore & \because & \because & \because & \because \\ 0 & \therefore & \because & \because & \because \\ 0 & 0 & \therefore & \because & \because \\ 0 & 0 & 0 & \therefore & \because \end{array}\right)$	donde $\therefore$ son números distintos de 0, y $\because$ son números cualquiera En este caso el sistema es Compatible Determinado **(S.C.D.)** (Ejemplo 1 anterior)

II. $\left(\begin{array}{cccc\|c} \therefore & \because & \because & \because & \because \\ 0 & \therefore & \because & \because & \because \\ 0 & 0 & \therefore & \because & \because \end{array}\right)$	Hay menos ecuaciones que incógnitas. El sistema será compatible indeterminado (**S.C.I**) Se resolverá dando a las incógnitas que sobran valores paramétricos. Ejemplo 2.
III. $\left(\begin{array}{cccc\|c} \therefore & \because & \because & \because & \because \\ 0 & \therefore & \because & \because & \because \\ 0 & 0 & \therefore & \because & \because \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \therefore \end{array}\right)$	La última ecuación quedará 0=nº distinto de cero ¡¡IMPOSIBLE¡¡ El sistema será Incompatible **(S.I)** Ejemplo 3.

Ejemplo 2:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y+7z=10\\ 5x-y+z=8\\ x+4y-10z=-11\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10\\ 5 & -1 & 1 & 8\\ 1 & 4 & -10 & -11\end{array}\right)\end{array} \begin{array}{l} 1^{a}\\ 2^{a}-5\cdot 1^{a}\\ 3^{a}-1^{a}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10\\ 5-5 & -1-(-15) & 1-35 & 8-50\\ 1-1 & 4-(-3) & -10-7 & -11-10\end{array}\right)\end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10\\ 0 & 1 & -34 & -42\\ 0 & 7 & -17 & -21\end{array}\right)\end{array}$$

$$\begin{array}{r} \\ 1^{a}\\ 2^{a}\\ 2\cdot 3^{a}-2^{a}\end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10\\ 0 & 14 & -34 & -42\\ 0 & 14-14 & -34-(-34) & -42-(-42)\end{array}\right)\end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 7 & 10\\ 0 & 14 & -34 & -42\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\end{array} \rightarrow 14y-34\lambda=-42 \Rightarrow y=\frac{34\lambda-42}{14} \rightarrow y=\frac{17\lambda}{7}-3$$

$$z=\lambda$$

$$x-3\cdot\left(\frac{17\lambda}{7}-3\right)+7\lambda=10 \Rightarrow x=10-7\lambda+\frac{51\lambda}{7}-9$$

Solución: $\boxed{x=1+\frac{2\lambda}{7};\ y=-3+\frac{17\lambda}{7};\ z=\lambda}$ S.C.I.

Ejemplo 3:

$$\left.\begin{array}{r} x-3y-2z=7\\ 2x-y+15z=3\\ x-8y-21z=11\end{array}\right\} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 7\\ 2 & -1 & 15 & 3\\ 1 & -8 & -21 & 11\end{array}\right)\end{array} \begin{array}{l} 1^{a}\\ 2^{a}-2\cdot 1^{a}\\ 3^{a}-1^{a}\end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 7\\ 2-2 & -1-(-6) & 15-(-4) & 3-14\\ 1-1 & -8-(-3) & -21-(-2) & 11-7\end{array}\right)\end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 7\\ 0 & 5 & 19 & -11\\ 0 & -5 & -19 & 4\end{array}\right)\end{array} \begin{array}{l} 1^{a}\\ 2^{a}\\ 3^{a}+2^{a}\end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 7\\ 0 & 5 & 19 & -11\\ 0 & -5+5 & -19+19 & 4-11\end{array}\right)\end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -2 & 7\\ 0 & 5 & 19 & -11\\ 0 & 0 & 0 & -7\end{array}\right)\end{array} \rightarrow 0=-7 \text{ ¡¡IMPOSIBLE¡¡ S.I.}$$

5. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES MEDIANTE DETERMINANTES.

A. TEOREMA DE ROUCHÉ-FRÖBENIUS

El teorema de Rouché-Fröbenius nos va a relacionar el rango de la matriz de coeficientes de un sistema de ecuaciones y de su ampliada con los términos independientes con el número de soluciones del sistema:

Sea el sistema de ecuaciones $AX=B$. La matriz de coeficientes es A, y la de términos independientes es $A|B$, entonces el Teorema de Rouché-Fröbenius nos dice:

- Si Rango(A)≠Rango(A|B) → El sistema es Incompatible (S.I.)
- Si Rango(A)=Rango(A|B)=nº de incógnitas → El sistema es Compatible Determinado(S.C.D.)
- Si Rango(A)=Rango(A|B)<nº de incógnitas → El sistema es Compatible Indeterminado(S.C.I.)

Ejemplo: $\left.\begin{array}{rrrr} x & -y & -z= & 1 \\ -x & & +3z= & 18 \\ -2x & +5y & -3z= & -52 \end{array}\right\} \text{A}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & 5 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 1\neq 0 \rightarrow Ran(A)\geq 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \rightarrow Ran(A)\geq 2 \\ |A| = 6+5-15+3=-1\neq 0 \rightarrow Ran(A)=3 \end{cases}$

Ran(A|B)=3 → (Tª Rouché) El sistema es Compatible Determinado (S.C.D.)

$$\left.\begin{array}{l} x-2y+z=0 \\ x-y=-1 \\ x-4y+3z=2 \end{array}\right\} A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 1\neq 0 \rightarrow Ran(A)\geq 1 \\ \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\neq 0 \rightarrow Ran(A)\geq 2 \\ |A| = -3-4+1+6=0 \rightarrow Ran(A)=2 \end{cases}$$

$A|B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & -4 & 4 \end{vmatrix} = -4+2-4+8=2\neq 0 \rightarrow Ran(A|B)=3$ → Sistema Incompatible

B. REGLA DE CRAMER

La regla de Cramer (|A| es distinto de cero) nos ayudará a resolver los sistemas de ecuaciones con ayuda de los determinantes.

REGLA DE CRAMER: La solución de todo sistema compatible determinado viene dado por:

$$\boxed{x=\frac{|A_x|}{|A|};\quad y=\frac{|A_y|}{|A|};\quad z=\frac{|A_z|}{|A|};\ \ldots\ldots\ldots}$$

Donde |A| es el determinante de la matriz de coeficientes y $|A_x|$ es el determinante de la matriz de coeficientes pero cambiando la columna de los coeficientes de la x por la columna de los términos independientes, $|A_y|$ cambiando la columna de la y, etc.

Ejemplo: Resolver el sistema: $\left.\begin{array}{c} 2x-3y+z=4 \\ x+y=6 \\ x+6y+2z=5 \end{array}\right\}$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 4+6-1+6=15;\quad |A_x|=\begin{vmatrix} 4 & -3 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 8+36-5+36=75$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 6 & 0 \\ 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} = 24+5-6-8=15;\quad |A_z|=\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 10+24-18-4-72+15=-45$$

$$\boxed{x=\frac{75}{15}=5;\quad y=\frac{15}{15}=1;\quad z=\frac{-45}{15}=-3}$$

Regla de Cramer para Sistemas Compatibles Indeterminados: Se resolverían de la misma manera pero pasando las incógnitas que no intervienen en el rango a la columna de términos independientes.

Ejemplo: Resolver el sistema $\left.\begin{array}{c} 3x-2y+z=2 \\ 2x+5y-3z=15 \\ 11x-y=21 \end{array}\right\}$

$$A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 5 & -3 \\ 11 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} 3\neq 0 \rightarrow Ran(A)\geq 1 \\ \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 19\neq 0 \rightarrow Ran(A)\geq 2 \\ |A| = 66-2-55-9=0 \rightarrow Ran(A)=2 \end{array}\right\}$$

$$A|B=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1 & 2\\ 2 & 5 & -3 & 15\\ 11 & -1 & 0 & 21\end{pmatrix}\to\begin{vmatrix}3 & -2 & 2\\ 2 & 5 & 15\\ 11 & -1 & 21\end{vmatrix}=315-330-4-110+45+84=0\to Ran(A|B)=2$$

Quitamos la última ecuación y pasamos la incógnita z con los términos independientes.

$$\left.\begin{matrix}3x-2y=2-z\\ 2x+5y=15+3z\end{matrix}\right\}\to\ |A|=19;\ |A_x|=\begin{vmatrix}2-z & -2\\ 15+3z & 5\end{vmatrix}=10-5z+30+6z=40+z$$

$$|A_y|=\begin{vmatrix}3 & 2-z\\ 2 & 15+3z\end{vmatrix}=45+9z-4+2z=31+11z \qquad \text{Si } z=\lambda$$

$$\boxed{x=\frac{40+\lambda}{19};\quad y=\frac{31+11\lambda}{19};\quad z=\lambda}$$

C. SISTEMAS HOMOGÉNEOS

Son aquellos en los que todos los términos independientes son cero. Todos los sistemas homogéneos son compatibles (tiene una solución trivial: x=0; y=0; z=0;……). Sólo faltaría comprobar si son compatibles determinados (Rango(A)= nº incógnitas) o compatibles indeterminados (Rango(A)< nº incógnitas).